
Česká zemědělská univerzita v Praze

Provozně ekonomická fakulta

Katedra systémového inženýrství

Optimalizační modely s nekonvexní po částech

lineární účelovou funkcí

Disertační práce

Studijní obor: Systémové inženýrství

Školitel: doc. Ing. Ludmila Dömeová, CSc.

Doktorand: Ing. Robert Hlavatý

© Robert Hlavatý

Praha, 2015

Poděkování

Děkuji své školitelce doc. Ing. Ludmile Dömeové, CSc. za pomoc v průběhu tvorby této práce a také doc. Ing. Milanu Houškovi, Ph.D. za inspiraci při volbě tématu. Současně děkuji všem členům katedry systémového inženýrství, díky jejichž podpoře a spolupráci v průběhu doktorského studia tato práce mohla vzniknout.

SOUHRN

Disertační práce je zaměřena na řešení úloh s nekonvexní po částech lineární úcelovou funkcí s lineárními omezujícími podmínkami. V práci je představen originální přístup k řešení úloh toho typu a podrobně popsán navržený algoritmus.

Literární přehled je věnován teoretickým východiskům, která je nezbytné popsat před vypracováním vlastního přístupu k řešení stanoveného problému. Nejprve je popsána problematika lineárního programování a obecný algoritmus simplexové metody. Další kapitola je věnována případům s více úcelovými funkcemi a metodám vícekriteriálního programování. Největší prostor je věnován vícekriteriálnímu simplexovému algoritmu, který potom bude i dále v práci realizován.

Následuje kapitola o nelineárním programování, kde je pojednáno o podmínkách existence optimálního řešení. V této kapitole je také značná část věnována problematice konvexnosti funkcí, jelikož je hledisko konvexnosti v této práci zásadním tématem.

Posledním typem matematického programování je po částech lineární programování. Zde jsou představeny po částech lineární modely, návaznost na lineární programování a možnosti řešení po částech lineárních modelů. V závěru literárního přehledu jsou představeny některé případové studie současnosti, které jsou spojeny s modely po částech lineárního programování.

Poté již následuje vlastní návrh řešení problému. Nejprve je představen obecný model po částech lineárního programování (PWLP), který reprezentuje úlohu, pro níž je třeba nalézt algoritmus řešení. Na základě přístupů popsanych v řešeršní části je tento model (PWLP) transformován na model s podmínkami dělicích bodů (PWLP-B), které vyjadřují hledisko jednotlivých lineárních segmentů po částech lineární funkce. Přidáním těchto podmínek do modelu získává prostor řešení určité specifické vlastnosti, které jsou zde podrobně popsány. Následuje diskuze o možnostech řešení tohoto modelu a v jejím závěru je představen vlastní přístup řešení, který spočívá v převedení modelu (PWLP-B) na model vícekriteriálního programování (PWLP-MC). Použitelnost tohoto přístupu je řádně zdůvodněna.

Navržený přístup je potom demonstrován na třech odlišných zadáních. Jsou rozlišeny případy, kdy má nekonvexní po částech lineární úcelová funkce monotónní a nemonotónní průběh. Nejprve je představen případ s monotónní úcelovou funkcí a postup algoritmu je zde podrobně komentován. Následuje představení případu s nemonotónní úcelovou funkcí, kde jsou podrobně komentovány již pouze ty okolnosti,

které se odlišují od případu předchozího. Na závěr je představen případ s vlastnostmi degenerace a symetrie, které mohou komplikovat řešení. Po realizaci všech třech zadání ještě následuje návod pro řešitele, jak se lépe orientovat v prostoru řešení, jelikož tato orientace není u rozsáhlejších úloh triviální. Na závěr je stručně shrnutý navržený algoritmus řešení doplněný o obrazové schéma.

Klíčová slova: Po částech lineární funkce, vícekriteriální programování, vícekriteriální simplexový algoritmus, nekonvexní funkce, dělicí body.

SUMMARY

The PhD thesis is focused on solution of a problem with non-convex piecewise linear objective function with linear constraints. The original approach is presented while the designed algorithm is described in detail.

The literature review is dedicated to theoretical basis that has to be described before elaborating own original approach to solution of the given problem. First, the means of linear programming and the algorithm of the simplex method are described. Next chapter describes cases with multiple objective functions and methods of multiobjective programming. Main attention is given to the multiobjective simplex algorithm which is to be further used in the thesis.

The chapter nonlinear programming follows where the conditions of optimality are discussed. In the same chapter, a considerable part is dedicated to the problems of functions' convexity since the aspect of convexity is the essential topic here. The last branch of the mathematical programming described is piecewise linear programming. Here, piecewise linear models are introduced and the relationship to linear programming and the possibilities of solution are described. At the end of the literature review, some case studies of the recent years based on the piecewise linear programming are presented.

Thereafter the own design of the solution follows. First of all, the general piecewise linear programming model (PWLP) is introduced. The model represents the problem for which the solution must be found. Considering the approaches described in the literature review the model (PWLP) is transformed into the model with added boundary points constraints (PWLP-B). These additional constraints express the aspect of individual linear segments of piecewise linear function. The solution space of the model gains some specific properties if enriched of these constraints. These properties are described in detail. The discussion about solution possibilities of the model follows and at the end, the original approach to solution is introduced. It lies in conversion of the model (PWLP-B) into multiobjective programming model (PWLP-MC). The applicability of this approach is properly justified.

Proposed approach is then demonstrated on three different examples. Two situations are distinguished where the non-convex piecewise linear objective function is monotone or not. First, the situation with the monotone objective function is introduced and the means of algorithm are commented in detail. Next, the second situation with

non-monotone function is introduced and described in detail only where the circumstances are different from the first situation. At the end, the situation with the properties of degeneracy and symmetry is introduced as these properties may complicate the way of solution. After these examples are introduced, the guide how oneself should orientate in the solution space is added because the orientation is not quite simple in extensive examples. The proposed algorithm is summarized and accompanied by schematics in the conclusion.

Keywords: Piecewise linear function, multiobjective programming, multiobjective simplex algorithm, non-convex function, boundary points.

Obsah

1	ÚVOD.....	1
2	CÍL PRÁCE A METODIKA.....	2
2.1	CÍLE.....	2
2.2	METODIKA.....	3
3	LITERÁRNÍ PŘEHLED	6
3.1	LINEÁRNÍ PROGRAMOVÁNÍ.....	6
3.1.1	SIMPLEXOVÁ METODA	7
3.2	VÍCEKRITERIÁLNÍ PROGRAMOVÁNÍ	12
3.2.1	METODY ŘEŠENÍ	13
3.2.2	VÍCEKRITERIÁLNÍ SIMPLEXOVÁ METODA	14
3.2.3	VÍCEKRITERIÁLNÍ SIMPLEXOVÝ ALGORITMUS	17
3.3	NELINEÁRNÍ PROGRAMOVÁNÍ	21
3.3.1	KONVEXNÍ FUNKCE.....	21
3.3.2	OVĚŘENÍ KONVEXNOSTI	22
3.3.3	PODMÍNKY OPTIMALITY	23
3.3.4	ALGORITMY ŘEŠENÍ.....	26
3.4	POZNÁMKY K NEKONVEXNÍ OPTIMALIZACI	31
3.5	PO ČÁSTECH LINEÁRNÍ FUNKCE	33
3.5.1	TEORETICKÁ VÝCHODISKA.....	33
3.5.2	EXPLICITNÍ PO ČÁSTECH LINEÁRNÍ MODELY	35
3.6	ALGORITMY ŘEŠENÍ PO ČÁSTECH LINEÁRNÍCH MODELŮ	41
3.6.1	VYUŽITÍ PROBLÉMU LINEÁRNÍ KOMPLEMENTARITY V LINEÁRNÍM PROGRAMOVÁNÍ	42
3.7	MODEL PO ČÁSTECH LINEÁRNÍHO PROGRAMOVÁNÍ	43
3.8	VYUŽITÍ MODELŮ PO ČÁSTECH LINEÁRNÍHO PROGRAMOVÁNÍ V PRAXI	45
3.8.1	APLIKACE V ZEMĚDĚLSTVÍ.....	45
3.8.2	EKONOMICKÉ APLIKACE	47
3.8.3	OSTATNÍ APLIKACE	49
4	NÁVRH ŘEŠENÍ ÚLOHY S NEKONVEXNÍ PO ČÁSTECH LINEÁRNÍ ÚČELOVOU FUNKCÍ	52

4.1	OBCENÝ MODEL PO ČÁSTECH LINEÁRNÍHO PROGRAMOVÁNÍ	52
4.1.1	PO ČÁSTECH LINEÁRNÍ ÚČELOVÁ FUNKCE	53
4.1.2	ZAVEDENÍ DĚLICÍCH BODŮ DO MODELU	55
4.2	PROSTOR PŘÍPUSTNÝCH ŘEŠENÍ	59
4.2.1	OMEZENÍ PROSTORU PŘÍPUSTNÝCH ŘEŠENÍ.....	60
4.2.2	ROZDĚLENÍ PROSTORU PŘÍPUSTNÝCH ŘEŠENÍ	61
4.3	HLEDÁNÍ OPTIMÁLNÍHO ŘEŠENÍ ÚLOHY.....	67
4.3.1	KOMBINATORICKÉ ŘEŠENÍ	68
4.3.2	ROZDĚLENÍ NA SUB-ÚLOHY	69
4.3.3	ROZLOŽENÍ ÚČELOVÉ FUNKCE NA FRAGMENTY	70
4.4	ŘEŠENÍ PROBLÉMU S VYUŽITÍM VÍCEKTERIÁLNÍHO SIMPLEXOVÉHO ALGORITMU	71
4.5	ILUSTRATIVNÍ ÚLOHA HLEDÁNÍ OPTIMÁLNÍHO ŘEŠENÍ (I) – MONOTÓNŇÍ PŘÍPAD	72
4.5.1	PROSTOR ŘEŠENÍ ÚLOHY	73
4.5.2	MODIFIKACE ÚLOHY A PŘEVOD DO KANONICKÉHO TVARU	75
4.5.3	ZÁPIS MODELU DO MODIFIKOVANÉ SIMPLEXOVÉ TABULKY	77
4.5.4	POSLOUPNOST KROKŮ ALGORITMU.....	79
4.5.5	DISKUZE O ŘEŠENÍ ILUSTRATIVNÍ ÚLOHY (I).....	88
4.5.6	POZNÁMKY K MINIMALIZAČNÍ ÚLOZE	90
4.6	ILUSTRATIVNÍ ÚLOHA HLEDÁNÍ OPTIMÁLNÍHO ŘEŠENÍ (II) – NEMONOTÓNŇÍ PŘÍPAD.....	94
4.7	ILUSTRATIVNÍ ÚLOHA HLEDÁNÍ OPTIMÁLNÍHO ŘEŠENÍ (III) – DEGENERACE A SYMETRIE	111
4.8	ORIENTACE VE VÍCEROZMĚRNÉM PROSTORU ŘEŠENÍ	118
4.8.1	MODIFIKACE CENOVÝCH KOEFICIENTŮ ÚLOHY	120
4.8.2	ORIENTACE V EVIDENCI NEPROZKOUMANÝCH BÁŽÍ ÚLOHY	122
5	<u>ALGORITMUS ŘEŠENÍ OPTIMALIZAČNÍ ÚLOHY S NEKONVEXNÍ PO ČÁSTECH LINEÁRNÍ FUNKCÍ.....</u>	<u>124</u>
6	<u>ZÁVĚR.....</u>	<u>126</u>
	<u>ZDROJE.....</u>	<u>128</u>

1 Úvod

Optimalizační modely jsou využívány ve skutečně velkém množství oblastí vědy a praxe. Většina technik z oblasti operačního výzkumu je na optimalizačních přístupech založena. Od typických oblastí, jako je matematické programování, se lze dostat k *teorii her*, *logistickým systémům*, *teorii hromadné obsluhy* nebo třeba *distribučním úlohám*. Optimalizační modely nalézáme všude tam, kde existuje problém, jehož nejlepší (optimální) řešení se snažíme nalézt při dodržení stanovených podmínek. Přitom optimalizační techniky mají své jádro v základních odvětvích matematiky, jako jsou *lineární algebra* či *diferenciální počet*.

Řešení optimalizačních problémů bylo zhruba od 30. let minulého století zkoumáno a popisováno nespočetným množstvím autorů. A přesto stále existují takové problémy, jejichž efektivní řešení ještě známo není vůbec nebo jen s určitou chybou. Příkladem může být tradiční *problém obchodního cestujícího*, na nějž lze také nahlížet jako na problém optimalizační. U některých optimalizačních problémů je jejich řešení již dostatečně známé, avšak stále je možné objevovat nové přístupy k řešení, které jsou více či méně vhodné pro určité specifické situace.

Disertační práce s názvem *Optimalizační modely s nekonvexní po částech lineární funkcí* představuje inovativní přístup k řešení této speciální třídy optimalizačních modelů. Nekonvexnost optimalizační úlohy je fenomén, který ztěžuje hledání optimálního řešení, a algoritmy řešící takové úlohy jsou často velmi komplikované nebo časově nákladné. Tato práce přináší nový přístup k řešení specifického problému s touto nežádoucí vlastností. Problém je pomocí určitých technik převeden na problém bez této nežádoucí vlastnosti za cenu většího počtu proměnných a podmínek ve srovnání s modelem původním.

Tato disertační práce je jistým vyvrcholením autorova bádání a publikační aktivity v různých oblastech operačního výzkumu (Hlavatý, 2010, 2013, 2014, Hlavatý a Dömeová, 2014) a potom zejména v oblasti matematického programování (Hlavatý, 2012, Kašpar, Marušák a Hlavatý, 2015).

Disertační práce navazuje na původní práci docenta Milana Houšky z Katedry systémového inženýrství na ČZU v Praze, jenž se ve svých publikacích věnuje optimalizačním problémům s po částech lineární účelovou funkcí, a to především jejím konvexním případům (Houška a Brožová, 2003, Houška, 2005). V této práci čtenář nalezne rozšíření na případy nekonvexní, které jsou v následujících řádcích pokud možno srozumitelnou a přívětivou cestou vysvětleny a popsány.

2 Cíl práce a metodika

2.1 Cíle

Cílem disertační práce je *navrhnout vlastní přístup pro vyřešení optimalizačního modelu s nekonvexní po částech lineární účelovou funkcí*.

Tohoto obecného cíle bude dosaženo splněním následujících dílčích cílů:

1. *Definování modelu s nekonvexní po částech lineární účelovou funkcí.*

Modely s po částech lineární účelovou funkcí, která splňuje předpoklad konvexnosti, jsou dostatečně známé. Úkolem je definovat obecný model matematického programování s po částech lineární nekonvexní účelovou funkcí.

2. *Modifikace modelu s nekonvexní po částech lineární účelovou funkcí.*

Obecný model matematického programování s po částech lineární účelovou funkcí je potřeba vhodně upravit takovým způsobem, aby bylo možné na tento model aplikovat některý známý algoritmus, modifikaci některého známého algoritmu nebo kombinaci některých známých algoritmů

3. *Navržení algoritmu pro řešení modelu s nekonvexní po částech lineární účelovou funkcí.*

Předmětem matematického programování je zejména nalezení optimálních přípustných hodnot proměnných modelu. Jedná se o nalezení extrému účelové funkce proměnných, které musí vyhovovat zadaným vazebním podmínkám. Úlohy hledání vázaného extrému jsou všeobecně dobře známé. Zpravidla však pouze pro případy, kdy je příslušná účelová funkce konvexní, nebo je jiného speciálního typu. Cílem této fáze je tedy za pomoci optimalizačních technik nalézt optimální řešení úlohy (pokud takové existuje) a dokázat, že právě nalezené řešení je skutečným optimálním řešením úlohy.

2.2 Metodika

K dosažení stanovených cílů bude využito metodického postupu, který lze shrnout do následujících fází:

1. *Zpracování odborné literatury*

Literární přehled pojednává o současném stavu zkoumané problematiky a jsou zde popsána teoretická východiska, která jsou nezbytná pro realizaci vlastního výzkumu. Jednotlivé kapitoly literárního přehledu na sebe logicky navazují.

Literární přehled začíná kapitolou *Lineární programování*. Zde je také popsána obligátní metoda pro řešení problémů lineárního programování – *simplexová metoda*. K lineárnímu programování je připojena kapitola vícekritériálního programování, které vykazuje lineární charakter.

Model po částech lineárního programování ve skutečnosti může sloužit k řešení nelineárních problémů, neboť každou nelineární funkci lze aproximativně nahradit funkcí po částech lineární. Proto je v další části popsána problematika nelineárního programování. Zásadní otázkou každé úlohy matematického programování je určení existence optima účelové funkce, proto jsou dále definovány obecné podmínky optimality. Poté jsou představeny algoritmy, které na základě těchto podmínek fungují. Všechny tyto algoritmy se týkají konvexní optimalizace, proto jsou následně stručně uvedena úskalí nekonvexní optimalizace.

V hlavní části literárního přehledu je popsáno téma nejdůležitější, a to po částech lineární modely. Konkrétně jsou zde popsány především typy těchto modelů dle jednotlivých autorů, ale také specifické algoritmy řešení těchto modelů. V závěru literárního přehledu jsou uvedeny některé případové studie současnosti, které poukazují na užitečnost po částech lineárního modelování.

V literárním přehledu je vzhledem k povaze tématu množství odborných pojmů. Pojmy, které lze považovat za všeobecně srozumitelné, nejsou dále blíže charakterizovány (např. *derivace*, *normálový vektor*). Některé méně obvyklé pojmy, jejichž podstatu není možné komplexně postihnout v této práci, (např. *afinní funkce*, *Jacobiho matice*) jsou pak stručně vysvětleny

formou poznámek a zpravidla s odkazem na literaturu, která o dané problematice pojednává podrobně.

2. *Vlastní výzkum*

Na literární přehled navazuje vlastní originální práce. Ta spočívá v definici nekonvexního po částech lineárního modelu, jeho následné modifikaci a konstrukci algoritmu, který dokáže nalézt skutečné optimální řešení tohoto modelu. K realizaci těchto kroků bude využito poznatků nabytých v řešební části práce. K uskutečnění cílů není třeba využívat žádných speciálních výzkumných technik.

Postačujícím nástrojem pro nutné výpočty bude MS Excel 2013, který umožňuje algoritmy uvedeného typu řešit automaticky či poloautomaticky. Řešení problému bude doplněno o grafické ilustrace. Grafy funkcí jsou vytvořeny v zdarma dostupném online nástroji *Desmos graphing calculator*. Tento nástroj je schopen dle analytického zápisu vytvářet grafy funkcí jedné proměnné. Obrázky vytvořené tímto nástrojem budou doplněny v popisku komentářem *vytvořeno v DGC*.

Veškeré ostatní obrázky byly vytvořeny autorem v programu MS Powerpoint 2013. Pokud jsou tyto obrázky převzaty od jiných autorů, jsou doplněny odkazem na originální dílo. Prvky v textu vyžadující matematický zápis budou zobrazeny standardním konvenčním způsobem.

V práci se vyskytuje množství úloh hledání vázaného extrému, které jsou charakteristické maximalizační nebo minimalizační účelovou funkcí. Charakter této funkce není v práci jednotný. U citovaných prací jiných autorů je směr optimalizace vždy převzat v originální podobě a ve vlastní práci se vyskytují obě možnosti. Ve všech případech je možné maximalizační funkci převést na minimalizační a naopak. V některých případech by však bylo nutné upravit omezující podmínky úlohy tak, aby úloha dávala smysl, měla řešení a toto řešení nebylo triviální.

Vzorce, obrázky a tabulky jsou číslovány odlišným způsobem, aby bylo možné se na ně v textu odkazovat, pokud je třeba. Vzorce jsou číslovány v souvislosti s číslem kapitoly 1. nebo 2. úrovně a pořadovým číslem ve formátu X-X-X, obrázky ve formátu X.X a tabulky ve formátu TX.X.

3. Závěr, diskuze

Veškeré výstupy vlastního výzkumu je nutné stručně shrnout a podrobit diskuzi. Je rovněž nezbytné konfrontovat původní stanovené cíle se skutečnými závěry práce a konstatovat, že tyto cíle byly naplněny. Takto bude učiněno v samém závěru práce.

3 Literární přehled

Literární přehled obsahuje teoretická východiska, na nichž je postaven vlastní výzkum uvedený v druhé části této disertační práce. Práce jiných autorů, ze kterých je čerpáno, se týkají zejména problematiky hledání vázaných extrémů funkcí více proměnných. Tato poměrně obsáhlá problematika je zde redukována především na oblast matematického programování. Obecné pojednání o hledání stacionárních bodů funkcí – lokálních extrémů nebo sedlových bodů – zde není uvedeno, neboť přímo nesouvisí s konkrétními cíli této disertační práce. Předpokládá se však, že čtenář je dostatečně seznámen se základními principy hledání volných i vázaných extrémů funkcí jedné či více proměnných. Stejně tak je předpokladem pochopení následujícího textu čtenářova znalost základů diferenciálního počtu a lineární algebry. Literární přehled se věnuje různým přístupům k matematickému programování, největší prostor je věnován problematice vícekritériální optimalizace a po částech lineárním modelům. V literárním přehledu je také část textu věnována konvexním funkcím a úskalím úloh s nekonvexními funkcemi. V závěru literárního přehledu jsou uvedeny aplikace modelů po částech lineárního programování, které ilustrují využitelnost teoretického aparátu, jemuž se tato práce věnuje, v praxi.

3.1 Lineární programování

Obecný problém matematického programování popisuje množství autorů. Jeter (2010, s. 23) uvádí, že jednou z prvních formulací problému matematického programování byla dopravní úloha. Problémy matematického programování se mezi prvními zabývali Kantorovič (1939), Hitchcock (1941) a Koopmans (1949). V roce 1975 za svůj přínos obdrželi Kantorovič a Koopmans Nobelovu cenu za ekonomii. Následující popis problému matematického programování uvádí Jeter (2010, s. 1-2). Necht' f je funkce reálných čísel několika proměnných x_1, x_2, \dots, x_n . Potom definujeme základní problém matematického programování jako následující problém

minimalizujte (nebo maximalizujte) $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$

za podmíněk

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \Omega,$$

kde Ω představuje podmnožinu definičního oboru f .

Pokud je $\Omega = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : \forall x_i \in R\}$, potom tento problém nazýváme úlohou hledání volného extrému (originálně *unconstrained optimization*). R zde vyjadřuje množinu všech reálných čísel. Pokud má být výše uvedený problém omezený, pak je množina Ω obvykle definována jako množina hodnot proměnných splňujících soustavu rovnic a nerovnic, které nazýváme omezení. Funkce $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ se nazývá účelová (nebo kriteriální) funkce. Ω je často nazývána jako množina přípustných řešení.

Funkce f je lineární, pokud existuje ve tvaru

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_1x_1 + \dots + c_nx_n \quad (3-1-1)$$

kde $c_1, \dots, c_n \in R$. Jedná se tedy o reálné konstanty. Konstanta c_i se nazývá cenovým koeficientem proměnné x_i . Omezení ve tvaru rovnice je lineárním pokud existuje ve tvaru

$$a_1x_1 + \dots + a_nx_n = b \quad (3-1-2)$$

kde $a_1, \dots, a_n, b \in R$. Pokud jsou omezení ve tvaru nerovnic, musí mít jeden z následujících tvarů:

$$\begin{aligned} a_1x_1 + \dots + a_nx_n &\leq b \\ a_1x_1 + \dots + a_nx_n &< b \\ a_1x_1 + \dots + a_nx_n &\geq b \\ a_1x_1 + \dots + a_nx_n &> b \end{aligned} \quad (3-1-3)$$

kde $a_1, \dots, a_n, b \in R$.

Pokud je $f(x_1, \dots, x_n)$ lineární a množina přípustných řešení je zcela určena soustavou lineárních rovnic a nerovnic, potom se tento problém matematického programování nazývá úlohou *lineárního programování*. Ve všech ostatních případech hovoříme o *nelineárním programování*.

3.1.1 Simplexová metoda

Jak popisuje Jeter (2010, s. 23-24), v roce 1940 se techniky matematického programování dostaly do popředí zájmu amerického letectva. Bylo zjištěno, že velké množství problémů vyžaduje minimalizaci nebo maximalizaci lineární funkce několika proměnných s ohledem na určitý počet lineárních omezení. Dantzig (1948) proto vytvořil metodu pro řešení takovýchto problémů, která se nazývá simplexová metoda (nebo také primární simplexová metoda).

Před samotným podrobným popisem simplexové metody nejdříve zavedeme některé pojmy týkající se modelu lineárního programování, které budou v práci nadále hojně využívány. Rozhodovací proměnné – původní proměnné modelu, značení x_j .

- Doplnkové proměnné – proměnné přidané v rámci transformace modelu do rovnicového tvaru, vyjadřují překročení či nedosažení omezující podmínky, značení d_j .
- Pomocné proměnné - proměnné přidané v rámci transformace modelu do kanonického tvaru, vyjadřují nesplnění omezující podmínky typu \geq nebo $=$, značení p_j .
- Kanonický tvar – tvar matice modelu lineárního programování, kde všechny omezující podmínky jsou ve tvaru rovnic a levá strana obsahuje implicitně jednotkovou matici.
- Kanonická báze – neboli ortonormální báze, báze jednotkových vektorů $(1,0,0, \dots), (0,1,0, \dots), (\dots, 0,0,1)$.
- Dualita – dvojí pohled na optimalizační problém – primární a duální model.
- Stínové ceny – hodnoty vyjadřující změnu účelové funkce a jsou počítány v kritériu optimality. Z pohledu duálního modelu se jedná o hodnoty duálních proměnných. Značení $z_j - c_j$.

Popis primární simplexové metody uvádí množství autorů. Velmi přehledně a s využitím názorných příkladů ji popisuje Vanderbei (2008, s. 13-22). Následující obecnější popis primární simplexové metody uvádí Jeter (2010, s. 81-88).

Uvažujme problém lineárního programování ve tvaru

$$\begin{aligned} & \text{Minimalizujte } \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ & \text{podle } \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \text{ a } \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned} \tag{3-1-4}$$

kde $\mathbf{A} \in R_{m \times n}$, $\mathbf{x} \in R_{n \times 1}$. Dodejme, že všechna omezení jsou ve tvaru rovnic a každá proměnná x_i je vázána podmínkou nezápornosti. Vektor \mathbf{b} označuje vektor pravých stran a vektor \mathbf{c} vektor cenových koeficientů účelové funkce. Dále budeme uvažovat, že hodnota matice \mathbf{A} je m (potom $m \leq n$). Tento požadavek nevede ke ztrátě na obecnosti této metody.

Definujme z_0 jako $z_0 = \mathbf{c}^T \mathbf{x}$. Potom lze problém (3-1-4) vyjádřit jako hledání řešení pro $\mathbf{x} \in R_{n \times 1}$ a $z_0 \in R$ pro

$$\begin{aligned} \mathbf{Ax} &= \mathbf{b} \\ -\mathbf{c}^T \mathbf{x} + z_0 &= 0 \end{aligned} \quad (3-1-5)$$

kde je pro $\mathbf{x} \geq 0$ minimální z_0 . Tato omezení mohou být zapsána maticově jako soustava rovnic

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{c}^T & \mathbf{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ z_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3-1-6)$$

nebo také v rozšířeném tvaru

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} & \mathbf{b} \\ -\mathbf{c}^T & \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (3-1-7)$$

kde $\mathbf{0}$ značí nulový sloupec.

Protože je hodnota $|\mathbf{A}| = m$, potom \mathbf{A} obsahuje m lineárně nezávislých sloupcových vektorů. Pro zjednodušení zápisu, ale bez ztráty obecnosti, budeme předpokládat, že prvních m sloupců matice \mathbf{A} je lineárně nezávislých. Nechť je $\mathbf{B} = [\mathbf{A}^{(1)} \dots \mathbf{A}^{(m)}]$, tj. matice prvních m sloupců matice \mathbf{A} , a $\mathbf{D} = [\mathbf{A}^{(m+1)} \dots \mathbf{A}^{(n)}]$, tj. matice posledních $n - m$ sloupců matice \mathbf{A} . Potom je $\mathbf{A} = [\mathbf{B} \quad \mathbf{D}]$. Nechť je

$\mathbf{x}_B = [x_1 \dots x_m]^T$, $\mathbf{x}_D = [x_{m+1} \dots x_n]^T$, $\mathbf{c}_B = [c_1 \dots c_m]^T$ a $\mathbf{c}_D = [c_{m+1} \dots c_n]^T$. Potom $\mathbf{x} = [\mathbf{x}_B^T \quad \mathbf{x}_D^T]$ a $\mathbf{c} = [\mathbf{c}_B^T \quad \mathbf{c}_D^T]$. Dále ze vztahu (3-1-6) získáme

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{D} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{c}_B^T & -\mathbf{c}_D^T & \mathbf{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_B \\ \mathbf{x}_D \\ z_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3-1-8)$$

a z toho

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{D} & \mathbf{0} & \mathbf{b} \\ -\mathbf{c}_B^T & -\mathbf{c}_D^T & \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (3-1-9)$$

Tato matice se nazývá výchozí matice problému.

Vynásobením zleva maticí

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{c}_B^T & \mathbf{1} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \quad (3-1-10)$$

dostaneme

$$\begin{bmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{B}^{-1} \mathbf{D} & \mathbf{0} & \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b} \\ \mathbf{0} & \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{D} - \mathbf{c}_D^T & \mathbf{1} & \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b} \end{bmatrix} \quad (3-1-11)$$

\mathbf{E} je jednotková submatice. Matici (3-1-11) lze získat také realizací určitého počtu elementárních řádkových úprav matice (3-1-9).

Teorém 1

Pokud je $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \geq 0$ a $\mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{D} - \mathbf{c}_D^T \leq 0$, potom $\mathbf{x} = [\mathbf{x}_B^T \quad \mathbf{x}_D^T]^T$, kde $\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$ a $\mathbf{x}_D = [0 \dots 0]^T$, je řešením problému lineárního programování a minimální hodnota účelové funkce je $z_0 = \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b}$.

Předpokládejme, že $\mathbf{A}\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{b}$ a $\bar{\mathbf{x}} \geq 0$. Necht' je $\mathbf{X}_B = [\mathbf{E} \quad \mathbf{B}^{-1}\mathbf{D}]$. Platí, že $\mathbf{B}\mathbf{X}_B = \mathbf{B}[\mathbf{E} \quad \mathbf{B}^{-1}\mathbf{D}] = [\mathbf{B} \quad \mathbf{B}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{D}] = [\mathbf{B} \quad \mathbf{D}] = \mathbf{A}$. Proto $\mathbf{b} = \mathbf{A}\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{B}\mathbf{X}_B\bar{\mathbf{x}}$ a $\mathbf{b} = \mathbf{B}\mathbf{x}_B$. Tedy $0 = \mathbf{B}(\mathbf{x}_B - \mathbf{X}_B\bar{\mathbf{x}})$. Protože je matice \mathbf{B} regulární, lze odvodit, že $\mathbf{x}_B - \mathbf{X}_B\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{0} = \mathbf{0}$, čili $\mathbf{x}_B = \mathbf{X}_B\bar{\mathbf{x}}$. Potom

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_B^T \mathbf{x}_B &= \mathbf{c}_B^T \mathbf{X}_B \bar{\mathbf{x}} = \mathbf{c}_B^T [\mathbf{E} \quad \mathbf{B}^{-1}\mathbf{D}] \bar{\mathbf{x}} = \\ &= [\mathbf{c}_B^T \quad \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1}\mathbf{D}] \bar{\mathbf{x}} \leq [\mathbf{c}_B^T \quad \mathbf{c}_D^T] \bar{\mathbf{x}} = \mathbf{c}^T \bar{\mathbf{x}} \end{aligned} \quad (3-1-12)$$

Tímto dostáváme výsledek. Říkáme, že pokud $\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$ a $\mathbf{x}_D = [0 \dots 0]^T$, potom $\mathbf{x} = [\mathbf{x}_B^T \quad \mathbf{x}_D^T]^T$ se nazývá bazické řešení soustavy $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Přitom musí platit, že matice \mathbf{B} není singulární¹. Matice \mathbf{B} se nazývá matice báze a soustava sloupců $\{\mathbf{A}^{(1)}, \dots, \mathbf{A}^{(m)}\}$ se nazývá přípustná báze bazického řešení. Každé bazické řešení \mathbf{x} z $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, které je zároveň přípustným řešením problému (3-1-4), tj. pro $\mathbf{x} \geq 0$ se nazývá přípustné bazické řešení. Nedegenerované přípustné bazické řešení je takové řešení, pro které $\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} > \mathbf{0}$. Nazvěme $F = \{\mathbf{x}: \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$ množinou přípustných řešení příkladu (3-1-4). Teorém definuje postačující podmínku, jmenovitě $\mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{D} - \mathbf{c}_D^T \leq 0$ pro přípustné bazické řešení $\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$, kde $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \geq 0$ a $\mathbf{x}_D = [0 \dots 0]^T$ je optimálním řešením úlohy.

Necht' je $z_j - c_j$ hodnota stínové ceny proměnné x_j .

Teorém 2

Existuje-li některé j takové, že $z_j - c_j > 0$ a každé $x_{ij} \leq 0$, potom má úloha neomezené minimum na množině F .

Teorém 3

Pokud existuje takové j , pro které $z_j - c_j > 0$ a jestliže některé $x_{ij} > 0$, kde x_{ij} je vstup do j -tého sloupce v matici \mathbf{X}_B , potom pivotizací prvku x_{kj} , pro nějž platí $\bar{b}_k/x_{kj} = \min\{\bar{b}_i/x_{ij}: x_{ij} > 0\}$, dostaneme nové přípustné bazické řešení, které

¹ Čtvercová matice, jejíž řádky nebo sloupce nejsou lineárně nezávislé. Determinant této matice je nulový.

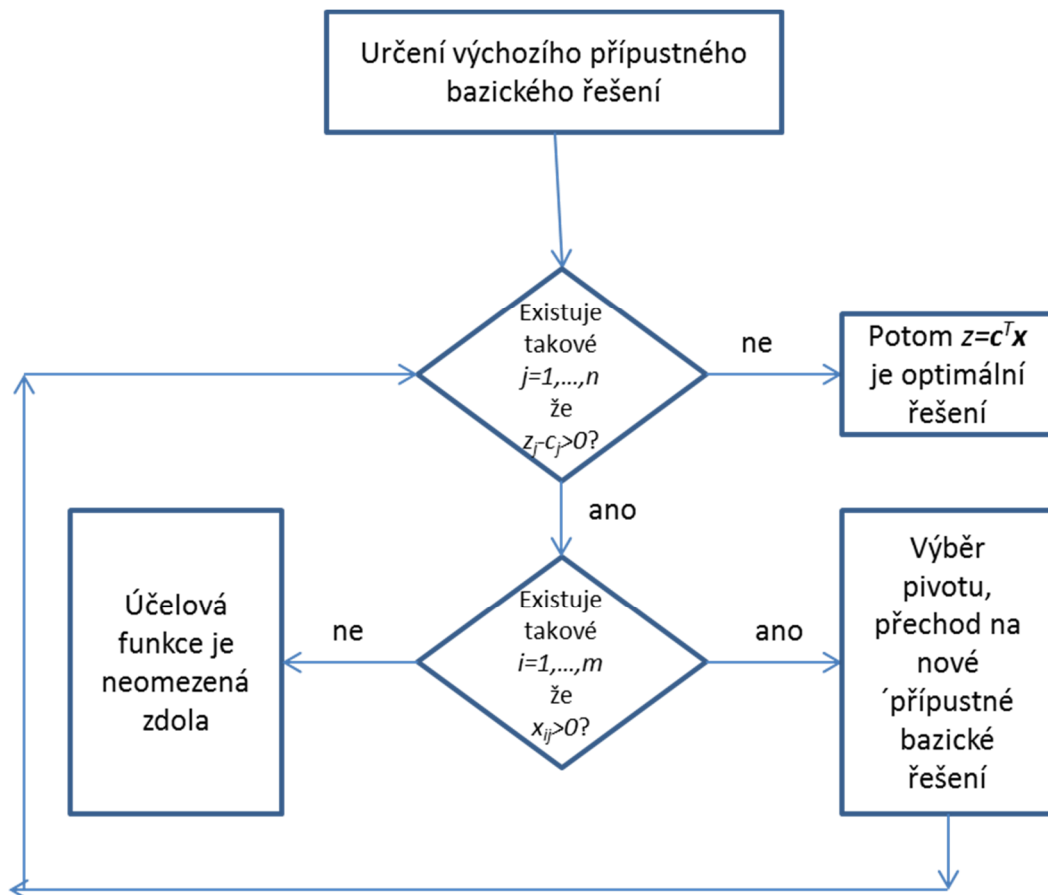
nezvyšuje hodnotu z_0 . Pokud $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} > 0$, tzn., že přípustné bazické řešení $\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$ a $\mathbf{x}_D = [0 \dots 0]^T$ je nedegenerované, potom se ve skutečnosti hodnota z_0 snižuje.

Teorém 4

Pokud $\mathbf{c}^T \mathbf{x}$ dosáhne konečného minima na množině F , potom je minimum některým přípustným bazickým řešením množiny F .

Tyto čtyři teorémy umožňují vyřešit problém lineárního programování, pokud známe výchozí přípustné bazické řešení množiny F . Podle teorému 3 generujeme sekvenci přípustných bazických řešení, pro něž se hodnota účelové funkce $z_0 = \mathbf{c}^T \mathbf{x}$ nezvyšuje. Iterace končí, jestliže je vyhověno podmínkám v teorémech 1 a 2. Teorém 4 zajišťuje, že pokud existuje konečná optimální hodnota účelové funkce, potom lze toto řešení nalézt simplexovou metodou.

Schéma této iterace je uvedeno na následujícím obrázku:



Obrázek 3.1: Primární simplexová metoda, dle Jeter (2010, s. 90)

Je třeba doplnit, že toto schéma nezobrazuje situaci, kdy neexistuje přípustné optimální řešení úlohy, neboť se zde předpokládá, že úloha je postavena smysluplně tak, aby tato

situace nenastala. Pro praktickou realizaci simplexového algoritmu je využíváno tzv. simplexové tabulky. Tato tabulka může mít různé podoby dle toho, jaké modifikace obecné simplexové metody je využito. V literatuře se lze běžně setkat s *jednofázovou*, *dvoufázovou*, *revidovanou* či *duální simplexovou* metodou. Jednotlivé metody jsou vhodné pro modely lineárního programování s různými specifickými vlastnostmi. Obecná podoba simplexové tabulky zde uvedena není a její konkrétní využití pro účely této práce bude podrobně popsáno v praktické části.

3.2 Vícekriteriální programování

V některých situacích je rozhodování s jedinou kriteriální funkcí (jediným rozhodovacím kritériem) nepostačující, proto je potom vhodné zavést do rozhodovacího problému více kriteriálních funkcí (rozhodovacích kritérií zároveň). Z výpočetního hlediska je možné nakládat s více rozhodovacími kritérii různými způsoby. Jedním z průkopníků této problematiky je Zelený (1974, 1976) a později Cohon (1978), který ze Zeleného práce čerpá a zároveň přináší ucelený přehled metod vícekriteriální optimalizace. Následující pojednání o vícekriteriální optimalizaci je volně přejato z Cohonovy (1978) práce, pokud není uvedeno jinak.

Problém vícekriteriálního programování lze pro n proměnných, m podmínek a p kritérií definovat obecným způsobem následovně:

$$\begin{aligned} & \text{maximalizujte } Z(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ & = [Z_1(x_1, x_2, \dots, x_n), Z_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, Z_p(x_1, x_2, \dots, x_n)] \end{aligned}$$

za podmínek

$$\begin{aligned} g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) & \leq 0, i = 1, 2, \dots, m \\ x_j & \geq 0, j = 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

kde Z vyjadřuje vícekriteriální účelovou² funkci sestávající z p dílčích účelových funkcí.

Oproti problémům s jedinou účelovou funkcí zde nastává komplikace, že optimum jedné z p dílčích účelových funkcí obecně není zároveň optimum ostatních $p - 1$ účelových funkcí. Optimálnost hraje v úlohách s jedinou účelovou funkcí důležitou roli, neboť umožňuje rozhodovateli směřovat svou pozornost pouze k jedinému řešení či

² Účelová funkce je zde totéž co kriteriální funkce. Užití dvojího termínu je účelné, aby nedocházelo k matoucím slovním spojením jako např. *vícekriteriální kriteriální funkce*, byť je tento termín formálně v pořádku.

nevelké podmnožině řešení z jinak mnohem rozsáhlejší množiny všech přípustných řešení.

Pro účely vícekriteriální optimalizace je zaveden koncept tzv. nedominovanosti. Tento pojem má v původním jazyce několik variant. Cohon (1978) pracuje s pojmem *noninferiority* (tj. nepodřadnost, neméněcennost³), ovšem jak sám uvádí, odborníci z různých disciplín používají různé termíny. V matematickém programování je to též *nondominance*, statistici a ekonomové preferují pojem *efficiency* nebo také *Pareto optimality*. V této práci bude nadále používán český ekvivalent nedominovanost (vycházející z pojmu *nondominance*), jelikož je tento pojem nejbližší matematickému programování, o němž tato práce pojednává.

Následující věta vystihuje hlavní podstatu přístupu k optimalizaci ve vícekriteriálních úlohách.

Věta:

Přípustné řešení vícekriteriálního problému je nedominované, pokud neexistuje žádné jiné přípustné řešení, které by vyjadřovalo zlepšení v jednom kritériu, aniž by zároveň došlo ke zhoršení v jednom či více ostatních kritériích.

3.2.1 Metody řešení

Cohon popisuje čtyři přístupy k vícekriteriální optimalizaci:

- Agregace s váhami
- Parciální optimalizace
- Metoda NISE
- Vícekriteriální simplexový algoritmus

Dalším vhodným přístupem k vícekriteriální optimalizaci je také

- cílové programování,

kteřé jako první popisují Charnes, Cooper a Ferguson (1955).

Metoda agregace s váhami je založena na myšlence agregace všech přítomných účelových funkcí do jediné účelové funkce. Tato agregace může proběhnout aditivním nebo multiplikativním způsobem. Jednotlivým účelovým funkcím je také možné dávat různé váhy, dle subjektivní důležitosti pro dané kritérium. Po agregaci funkcí je již

³ přeložil autor

možné aplikovat přístupy běžné pro problémy s jedinou účelovou funkcí. V tomto případě však nedochází k identifikaci vzájemně nedominovaných řešení.

Metoda parciální optimalizace je založena na myšlence převádění účelových funkcí na omezující podmínky, kdy se ponechá vždy jediná účelová funkce v původním tvaru a dle této funkce potom hledáme dílčí optimum úlohy. Převedení každé další účelové funkce na omezující podmínku se realizuje doplněním reálné pravé strany, která je stanoveným cílem pro danou účelovou funkci, jehož je třeba dosáhnout.

Metoda NISE (The noninferior set estimation method) je metoda vyvinutá Cohonem (1978), která vede k aproximovanému nedominovanému řešení. Přesnost této aproximace je možné sledovat pomocí předem stanoveného chybového kritéria, které se během výpočtu porovnává s maximální možnou chybou v každé iteraci výpočtu. Tato metoda je oproti předchozím dvěma metodám poměrně komplikovaná a není na rozdíl od nich intuitivní. Je ovšem lépe aplikovatelná na reálné problémy složité povahy.

Cílové programování je založeno na minimalizaci odchylek od stanovených cílů. Tyto cíle, kterých je třeba v jednotlivých kritériích dosáhnout, stanovuje rozhodovatel na základě racionálních předpokladů. Hodnoty cílů mohou být například stanoveny s využitím znalosti ideální a bazální varianty hodnoty daného kritéria.

Největší prostor z uvedených metod je zde i vzhledem k praktické části této práce věnován vícekriteriálnímu simplexovému algoritmu. Tato metoda se jako jediná z uvedených nesnaží pracovat pouze s jedinou účelovou funkcí.

3.2.2 Vícekriteriální simplexová metoda

Vícekriteriální simplexový algoritmus lze využít pro generování exaktní množiny všech nedominovaných řešení úlohy. Toho je dosahováno přesouváním z jednoho nedominovaného bazického řešení do dalšího, které s předchozím nedominovaným řešením sousedí. Tento postup se opakuje tak dlouho, až dokud nejsou nalezena všechna bazická nedominovaná řešení. Vícekriteriální simplexový algoritmus je založen na simplexovém algoritmu s jedinou účelovou funkcí a je realizován v modifikované simplexové tabulce. Modifikovaná tabulka se liší od klasické simplexové tabulky tím, že má více než jeden cenový vektor a také více než jeden vektor stínových cen, což se prakticky projeví přidáním p řádků (p je počet účelových funkcí) navrch a dospod původní simplexové tabulky. Namísto obvyklého označení řádku stínových cen $z_j - c_j$

označme tyto řádky v případě vícekritériálního simplexového algoritmu f_j^k . Pro každou proměnnou pak získáme vektor stínových cen f_j , tedy

$$f_j = \begin{bmatrix} f_j^1 \\ f_j^2 \\ \vdots \\ f_j^p \end{bmatrix} \quad (3-2-1)$$

Řádky stínových cen obsahují užitečné informace o nedominovanosti momentálního řešení vůči sousedním řešením. Vždy platí, že sousedící bazická přípustná řešení mají báze lišící se pouze v jedné složce.

Teorém 5 (Teorém 3.1.2., část a, Zelený (1974, s. 66))

Mějme některé přípustné bazické řešení. Pokud existuje takový nebazický sloupec $a_j, j \notin B$, tak že $f_j^k \leq 0$ pro $k = 1, 2, \dots, p$ a $f_j^k < 0$ pro alespoň jedno $k = 1, 2, \dots, p$, potom je toto přípustné bazické řešení dominované.

Tento teorém říká, že pokud lze některou proměnnou zařadit do báze s kladnou hodnotou tak, že všechny hodnoty účelových funkcí se zvýší současně (nebo alespoň některé z nich se zvýší a ostatní zůstanou stejné), potom musí být toto řešení dominované. Jinými slovy, pokud je sousedící bazické řešení ve všech hodnotách účelových funkcí lepší (nebo alespoň v některých lepší a v ostatních stejné), tak je toto bazické řešení ke stávajícímu řešení dominantní.

Teorém 6 (Teorém 3.1.2., část b, Zelený (1974, s. 66))

Mějme některé přípustné bazické řešení. Pokud existuje takový nebazický sloupec $a_j, j \notin B$ takový, že $f_j^k \geq 0$ pro $k = 1, 2, \dots, p$ a $f_j^k > 0$ pro alespoň jedno $k = 1, 2, \dots, p$, potom zařazení a_j do báze povede k dominovanému řešení.

V tomto teorému je řečeno, že pokud zařazení některé nebazické proměnné do báze povede ke snížení všech hodnot účelových funkcí zároveň ($f_j^k > 0$) nebo alespoň ke snížení některých hodnot bez zvýšení ostatních hodnot, potom bude nové řešení dominované stávajícím řešením. Toto je případ, kdy je sousední bazické řešení dominované stávajícím bazickým řešením.

Teorém 7 (Teorém 3.1.4, Zelený (1974, s. 67))

Mějme některé přípustné bazické řešení. Pokud existují dva odlišné nebazické sloupce a_j a $a_q, j, q \notin B$ tak, že

$$\theta_j f_j^k \leq \theta_q f_q^k, k = 1, 2, \dots, p \quad (3-2-2)$$

a tento vztah je splněn striktně jako nerovnice alespoň pro jedno $k = 1, 2, \dots, p$, potom je přípustné bazické řešení vycházející ze zařazení a_q do báze dominované přípustným bazickým řešením, které vychází ze zařazení a_j do báze. Parametr θ_j (θ_q) vyjadřuje, jakou hodnotu by nabývalo x_j po zařazení do báze.

Tento teorém vyjadřuje vztah mezi dvěma bazickými řešeními sousedními ke stávajícímu přípustnému bazickému řešení.

Uvedené teorémy se zaměřují na sousedící bazické řešení ke stávajícímu bazickému řešení. Další otázkou je ovšem nedominovanost stávajícího řešení. Jediný případ, kdy lze snadno rozhodnout o nedominovanosti řešení je situace, kdy je řešení jedinečným maximem pro některou z účelových funkcí. Simplexová tabulka indikuje jedinečné maximum, když jsou všechny stínové ceny pro všechny nebazické proměnné pro některou z účelových funkcí kladné. Pokud mají některé nebazické proměnné kladné stínové ceny v účelové funkci, zatímco ostatní mají nulové stínové ceny, potom je stávající řešení maximem pro danou účelovou funkci, ale není jedinečným maximem. Existence alternativního řešení znamená, že toto řešení může být dominované.

Všechny tyto teoretické předpoklady vytvářejí základ pro samotný vícekriteriální simplexový algoritmus. K tomu je ještě potřeba definovat metodu pro určení nedominovanosti daného bazického řešení. Zelený (1974) definuje pro vyřešení této otázky sub-úlohu. V této sub-úloze jde o nalezení přípustného řešení, které povede ke zlepšení alespoň jedné účelové funkce, ale zároveň nezhorší žádnou účelovou funkci. Pokud je možné takové přípustné řešení nalézt, potom je stávající bazické řešení dominované, pokud ne, je nedominované.

Podmínky nově definované sub-úlohy jsou:

$$\mathbf{x} \in F_d \quad (3-2-3)$$

$$Z_k(\mathbf{x}) \geq Z_k(\hat{\mathbf{x}}), k = 1, 2, \dots, p \quad (3-2-4)$$

kde první podmínka vyjadřuje souhrnně sadu původních omezení úlohy a druhá z podmínek vyjadřuje požadavek, aby nové přípustné řešení poskytlo v každé účelové funkci alespoň takovou hodnotu jako stávající řešení. Cílem této sub-úlohy je „posunout“ každou účelovou funkci tak, jak je to jen možné od stávajících hodnot. To lze provést převedením druhé z podmínek na rovnost:

$$Z_k(\mathbf{x}) - \delta_k = Z_k(\hat{\mathbf{x}}), k = 1, 2, \dots, p \quad (3-2-5)$$

kde δ_k je doplňková proměnná.

Účelová funkce této sub-úlohy je pak vyjádřena jako

$$\max V = \sum_{k=1}^p \delta_k \quad (3-2-6)$$

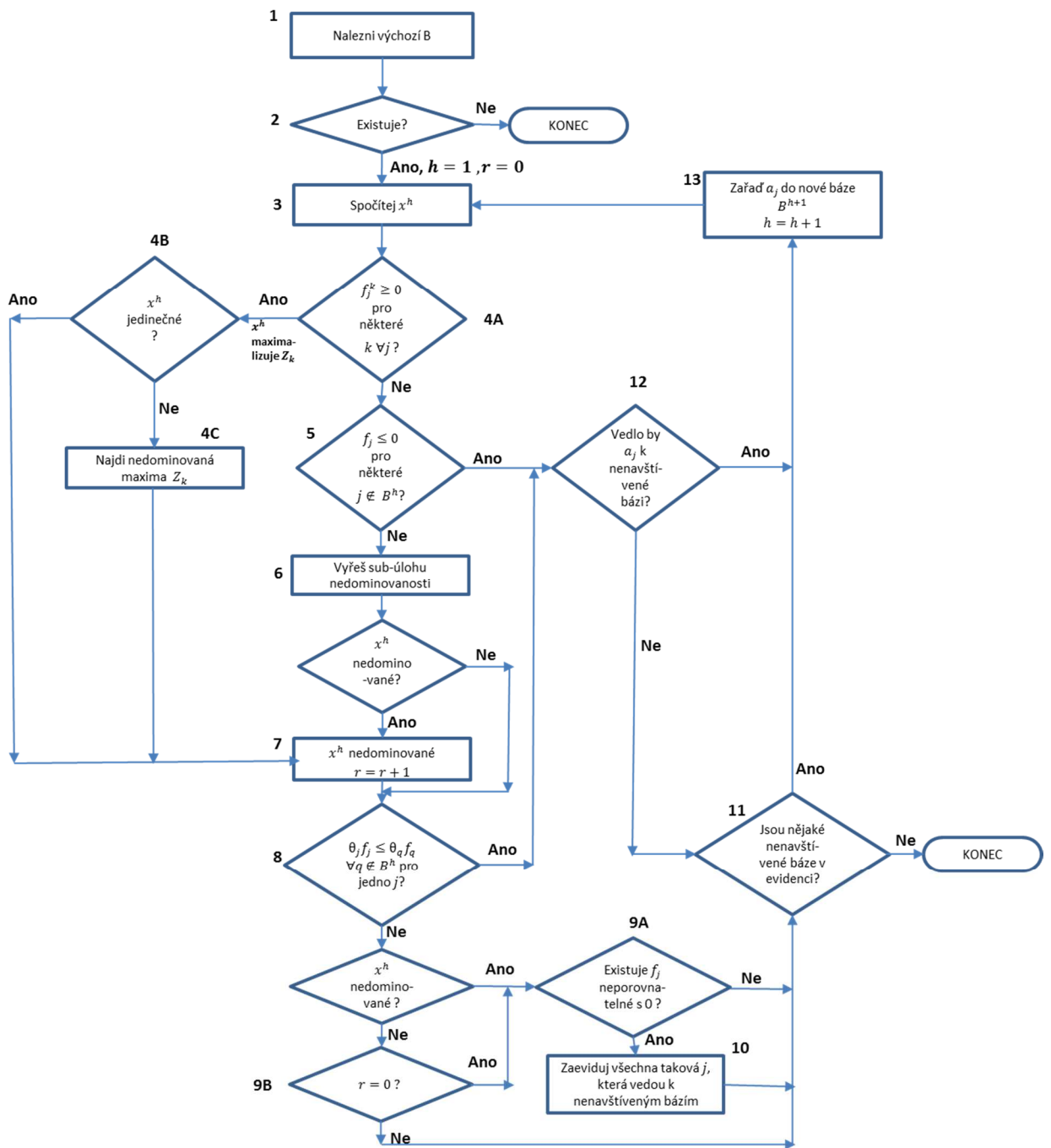
kteřá bude maximalizována dle (3-3-3) za podmínek nezápornosti

$$\delta_k \geq 0, k = 1, 2, \dots, p \quad (3-2-7)$$

Přípustné bazické řešení původního vícekriteriálního problému \hat{x} je nedominované, pokud $V = 0$ po vyřešení sub-úlohy. Takový výsledek sub-úlohy značí, že neexistují žádná přípustná řešení, která by vykazovala přírůstek ($\delta_k > 0$) ve kterékoliv účelové funkci při zachování všech ostatních účelových funkcí na minimálně stejné úrovni. Pokud je výsledkem sub-úlohy $V > 0$, potom je stávající řešení \hat{x} dominované. $V > 0$ znamená, že $\delta_k > 0$ pro alespoň jedno $k = 1, 2, \dots, p$. To znamená, že lze dosáhnout alespoň jedné lepší hodnoty účelové funkce, aniž by došlo k obětování hodnoty některého jiného kritéria.

3.2.3 Vícekriteriální simplexový algoritmus

V této části je popsán samotný algoritmus vícekriteriální simplexové metody, který je založen na tvrzeních uvedených v předchozí kapitole 3.2.2. Vývojový diagram tohoto algoritmu je znázorněn na obrázku 3.2.



Obrázek 3.2: Schéma vícekriteriálního simplexového algoritmu, dle Cohona (1974).

Nejprve je nalezeno některé výchozí přípustné bazické řešení v krocích 1-3. Pokud takové řešení nalezeno není, potom problém nemá řešení a algoritmus je ukončen. Následně jsou zkoumány všechny stínové ceny, aby bylo možné určit, zdali je stávající řešení dominované či nikoliv. Hodnoty rozhodovacích a doplňkových proměnných v bazickém přípustném řešení jsou označeny x^h a odpovídající báze B^h . Algoritmus lze inicializovat ze kteréhokoliv přípustného bazického řešení, lepší variantou se však dle

Cohona (1974) zdá být započítí algoritmu z některého dílčího optimálního řešení, čímž se počet kroků k nalezení optimálního řešení zkrátí.

V kroku 4A je zkontrolováno každé kritérium a určeno, zdali je některé z nich maximalizováno x^h . Pokud ano, je třeba v kroku 4B ověřit jedinečnost tohoto řešení vyhledáním takových nebazických proměnných, kde $f_j^k = 0$. Pokud je x^h jedinečné, označíme toto řešení jako nedominované v kroku 7. Pokud jedinečné není, potom nalezneme alternativní řešení, která jsou rovněž nedominovaná, v kroku 4C.

Pokud je zjištěno, že x^h v kroku 4A nemaximalizuje ani jedno z kritérií, potom vyhledáme nebazické sloupce, které mají všechny stínové ceny nekladné v kroku 5. Pokud nějaké takové sloupce existují, potom víme, že x^h je dominované. Jeden z těchto sloupců s nekladnými cenami, který by vedl k dosud neprozkoumanému řešení (krok 12) je zařazen do báze v kroku 13 a dostáváme nové bazické řešení, index h se zvýší o 1 a vracíme se do bodu 3. Pokud je v bodě 5 odpověď na otázku „ne“, potom o nedominovanosti nelze rozhodnout okamžitě. V kroku 6 je vyřešena sub-úloha o nedominovanosti x^h . Pokud je x^h nedominované, potom je index r , který vyjadřuje počet nedominovaných řešení, zvýšen o 1 v kroku 7.

V bodu 8 začínáme hledat nový perspektivní směr, kterým se posunout dále. S využitím teorému 7 je vyhledán dominující nebazický sloupec v kroku 8. Pokud je nalezen, potom se jedná o nejslibnější cestu, ať už je x^h dominované či nikoliv (pokud je x^h dominované, potom by bylo nejvhodnější nalézt nebazický sloupec s nekladnými stínovými cenami, k tomu ovšem nedošlo už v kroku 5). Dominující sloupec je zařazen do báze, pokud povede k některému dosud neprozkoumanému řešení.

Pokud se v kroku 8 nezdaří identifikovat dominující nebazický sloupec a zároveň x^h je nedominované, potom jsou v kroku 9A identifikovány ty nebazické sloupce, které mají některé stínové ceny kladné a některé záporné a zároveň jsou zaevidovány v kroku 10. Pokud je x^h dominované, potom není důvod krok 9A provést. Pokud ovšem až doposud nebylo nalezeno žádné nedominované řešení ($r = 0$ v kroku 9B), potom je krok 9A proveden i přesto, že x^h je nedominované. Algoritmus by totiž mohl být bez této kontroly předčasně ukončen.

Algoritmus pokračuje tak dlouho, dokud nebyla prozkoumána všechna „nadějná“ řešení, což je testováno v kroku 11. Tímto postupem lze nalézt všechna nedominovaná bazická řešení, neboť množina všech nedominovaných řešení je vzájemně „propojená“. To znamená, že lze dosáhnout kteréhokoliv bodu z jiného bodu této množiny konečným

počtem iterací simplexového algoritmu. Tato vlastnost množiny nedominovaných řešení zaručuje, že algoritmus nalezne všechna bazická nedominovaná řešení.

Evidenci nedominovaných řešení v průběhu výpočtu popisuje Zelený (1974) a uvádí dva možné způsoby evidence, které označuje jednoduše jako způsob A a B. Způsob A je založen na kompletním průchodu všemi přilehlými bazickými řešeními, způsob B projde pouze některá přilehlá řešení, u nichž to je smysluplné. Způsob B, který se na první pohled zdá být efektivnější, má tu nevýhodu, že některá řešení prochází více než jedenkrát. Obecně lze říct, že způsob A je vhodnější pro ruční výpočet a menší problémy a způsob B pro rozsáhlejší problémy při použití výpočetní techniky. Pro účely této práce uveďme způsob A, tak, jak jej popisuje Zelený (1974):

Předpokládejme, že bylo nalezeno první přípustné nedominované řešení $x^0 \in N_{ex}$, kde N_{ex} je množinou všech nedominovaných řešení. Protože jsou všechna nedominovaná řešení vzájemně propojená, lze množinu všech nedominovaných řešení chápat jako souvislý graf Γ . Dále označme $\Gamma(v)$ jako množinu všech vrcholů sousedících s vrcholem v včetně samotného vrcholu v . Indexy bazických vektorů v simplexové tabulce pro x^0 odpovídají v_0 z Γ .

- Nechť je $R_1 = \{v_0\}$ a $W_1 = \Gamma(v_0) - R_1$. Vyloučíme ty vrcholy z W_1 , které jsou dominované. Přejdeme z W_1 do \bar{W}_1 .
- Spočítáme všechny vrcholy z \bar{W}_1 .
- Nechť je $R_2 = R_1 \cup \bar{W}_1$ a necht' $v_{1i}, i = 1, 2, \dots, r_1$ jsou všechny vrcholy z \bar{W}_1 .
- Potom $W_2 = \bigcup_{i=1}^{r_1} \Gamma(v_{1i}) - R_2$. Přejdeme W_2 do \bar{W}_2 .
- Předpokládejme, že už jsme zkonstruovali R_s a \bar{W}_s pro $s = 2, 3, \dots, k$. Pokud $\bar{W}_k = \emptyset$, potom jsou všechna nedominovaná řešení N_{ex} nalezena, čili $R_k = V$.
- Pokud $\bar{W}_k \neq \emptyset$, spočítáme všechny vrcholy z \bar{W}_k a vytvoříme $R_{k+1} = R_k \cup \bar{W}_k$ a $W_{k+1} = \bigcup_{i=1}^{r_k} \Gamma(v_{ki}) - R_{k+1}$, kde v_{ki} označuje všechny vrcholy $\bar{W}_k, i = 1, \dots, r_k$. Transformujeme W_{k+1} na \bar{W}_{k+1} a pokračujeme dokud $\bar{W}_s = \emptyset, s = 2, 3, \dots$,

Tento postup evidence přípustných nedominovaných řešení je pro ruční výpočet vhodný, protože umožňuje snadný návrat ke všem vypočítaným simplexovým tabulkám.

3.3 Nelineární programování

Modely nelineární optimalizace a úskalí řešení těchto modelů popisují například Ruzsčzyński (2006, s. 1-13) nebo Bazaraa, Sherali a Shetty (2006, s. 1-4). Ve druhém jmenovaném díle je problém nelineárního programování definován následovně:

$$\begin{aligned} & \text{minimalizujte } f(\mathbf{x}) \\ & \text{za podmínek} \\ & g_i(\mathbf{x}) \leq 0 \text{ pro } i = 1, \dots, m \\ & h_i(\mathbf{x}) = 0 \text{ pro } i = 1, \dots, \ell \\ & \mathbf{x} \in X \end{aligned} \tag{3-3-1}$$

kde $f, g_1, \dots, g_m, h_1, \dots, h_\ell$ jsou funkce definované na R^n , X je podmnožinou R^n , a \mathbf{x} je vektorem n složek x_1, \dots, x_n . Tento problém je nutné vyřešit pro hodnoty proměnných x_1, \dots, x_n , které budou vyhovovat omezením a minimalizovat funkci f . Funkce f se nazývá účelová nebo kritériální funkce. Každé omezení typu $g_i(\mathbf{x}) \leq 0$ pro $i = 1, \dots, m$ se nazývá omezení ve tvaru nerovnice a každé omezení typu $h_i(\mathbf{x}) = 0$ pro $i = 1, \dots, \ell$ se nazývá omezení ve tvaru rovnice. Množina X typicky určuje dolní a horní omezení proměnných, což může hrát důležitou roli pro některé algoritmy. Vektor $\mathbf{x} \in X$, který vyhovuje všem omezením, se nazývá přípustné řešení problému. Soustava všech těchto možných řešení se nazývá množina přípustných řešení. Problémem nelineárního programování je pak nalézt přípustný bod $\bar{\mathbf{x}}$ tak, aby $f(\mathbf{x}) \geq f(\bar{\mathbf{x}})$ pro každý další přípustný bod \mathbf{x} . Takový bod $\bar{\mathbf{x}}$ se nazývá optimálním řešením úlohy. Pokud existuje více než jedno optimum, nazýváme tato řešení alternativní optimální řešení úlohy. Tento problém je samozřejmě možné definovat jako maximalizační.

3.3.1 Konvexní funkce

Bazaraa, Sherali a Shetty (2006) o konvexních (resp. konkávních) funkcích říkají, že tyto funkce mají některé speciální vlastnosti. Například každé lokální minimum konvexní funkce je také jejím globálním minimem, Díky těmto vlastnostem lze odvodit podmínky optimality a výpočetní postupy pro tyto typy funkcí. Problematika optimalizace na konvexních množinách je velmi rozsáhlá. U konvexních funkcí je třeba z pohledu optimalizace zkoumat jejich spojitost a diferencovatelnost, extrémní body těchto funkcí a grafickou reprezentaci konvexních množiny obecně. Podrobně se tomuto tématu věnuje Tuy (1998, s. 3-82), Bertsekas (1999, s. 191-280), Ruzsčzyński (2006, s. 17-87), nebo Bazaraa, Sherali a Shetty (2006, s. 39-162).

Uvedeme některé základní definice a úvod do problematiky dle posledních ze jmenovaných autorů.

Definice

Nechť je $f: S \rightarrow R$, kde S je neprázdná konvexní množina v R^n . Tato funkce f je konvexní na S tehdy, pokud platí

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2) \quad (3-3-2)$$

pro všechna $x_1, x_2 \in S$ a pro všechna $\lambda \in (0, 1)$. Funkce f se nazývá ryze konvexní na S , pokud výše uvedená nerovnost platí jako ryzí nerovnost pro každý rozdíl x_1 a x_2 v S a pro každé $\lambda \in (0, 1)$. Funkce $f: S \rightarrow R$ se nazývá konkávní (ryze konkávní) na S , pokud je $-f$ konvexní (ryze konvexní) na S .

3.3.2 Ověření konvexnosti

K určení, zdali je určitá funkce konvexní, lze zejména využít *Hessovy matice*, která může nabývat různých forem. Podle toho, jaké formy tato matice nabývá, lze rozhodnout o konvexnosti nebo nekonvexnosti dané funkce. Následující definici uvádí Bazaraa, Sherali a Shetty (2006).

Definice

Nechť je S neprázdná množina v R^n a nechť je $f: S \rightarrow R$. Potom je f takzvaně dvakrát diferencovatelná pro $\bar{x} \in S$, pokud existuje vektor $\nabla f(\bar{x})$ a symetrická matice $\mathbf{H}(\bar{x})$ typu $n \times n$, nazývaná *Hessova matice* a funkce $\alpha: R^n \rightarrow R$ tak, že platí

$$f(x) = f(\bar{x}) + \nabla f(\bar{x})^t(x - \bar{x}) + \frac{1}{2}(x - \bar{x})^t \mathbf{H}(\bar{x})(x - \bar{x}) + \|x - \bar{x}\|^2 \alpha(\bar{x}; x - \bar{x}) \quad (3-3-3)$$

pro každé $x \in S$ kde $\lim_{x \rightarrow \bar{x}} \alpha(\bar{x}; x - \bar{x}) = 0$. Funkce f se nazývá dvakrát diferencovatelná na otevřené množině $S' \subseteq S$, jestliže je dvakrát diferencovatelná v každém bodu na S' .

Je možné dodat, že pro dvakrát diferencovatelné funkce se Hessova matice $\mathbf{H}(\bar{x})$ skládá z parciálních derivací druhého řádu $f_{ij}(\bar{x}) \equiv \partial^2 f(\bar{x}) / \partial x_i \partial x_j$ pro

$i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, n$ a lze ji vyjádřit následovně:

$$\mathbf{H}(\bar{x}) = \begin{bmatrix} f_{11}(\bar{x}) & f_{12}(\bar{x}) & \cdots & f_{1n}(\bar{x}) \\ f_{21}(\bar{x}) & f_{22}(\bar{x}) & \cdots & f_{2n}(\bar{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n1}(\bar{x}) & f_{n2}(\bar{x}) & \cdots & f_{nn}(\bar{x}) \end{bmatrix} \quad (3-3-4)$$

Věta

Nechť je S neprázdná otevřená konvexní množina v R^n a nechť je $f: S \rightarrow R$ funkce dvakrát diferencovatelná na S . Potom je f konvexní tehdy a jen tehdy, pokud je Hessova matice pozitivně semidefinitní v každém bodu S .

Podrobný důkaz uvádí Bazaraa, Sherali a Shetty (2006, s. 114).

Pro zjištění konvexnosti určité funkce je tedy třeba nejprve ověřit, zdali je podle uvedené definice Hessova matice pozitivně semidefinitní. O tom lze rozhodnout na základě následujících tří vlastností.

Nechť je H symetrická matice typu $n \times n$ s prvky h_{ij} .

- Pokud je $h_{ii} \leq 0$ pro některé $i \in \{1, \dots, n\}$, matice H není pozitivně definitní a pokud je $h_{ij} < 0$ pro některé $i \in \{1, \dots, n\}$, matice H není pozitivně semidefinitní.
- Pokud je $h_{ij} = 0$ pro některé $i \in \{1, \dots, n\}$, musí také platit $h_{ij} = h_{ji} = 0$ pro všechna $j = 1, \dots, n$, jinak matice H není pozitivně semidefinitní.
- Pokud $n = 1$, matice H je pozitivně semidefinitní (pozitivně definitní) tehdy a jen tehdy, pokud $h_{11} \geq 0 (> 0)$. Pokud je $n \geq 2$, definujme

$$H = \begin{bmatrix} h_{11} & q^t \\ q & G \end{bmatrix} \quad (3-3-5)$$

v dělené formě, kde $q = 0$ pokud $h_{11} = 0$ a v ostatních případech $h_{11} > 0$.

Provedeme elementární řádkové úpravy matice pomocí prvního řádku H , abychom vždy dostali matici v následujícím tvaru:

$$H = \begin{bmatrix} h_{11} & q^t \\ 0 & G_{nové} \end{bmatrix} \quad (3-3-6)$$

Potom je $G_{nové}$ symetrická matice typu $(n-1) \times (n-1)$ a matice H je pozitivně semidefinitní tehdy a jen tehdy, pokud je $G_{nové}$ pozitivně semidefinitní. Pokud je navíc $h_{11} > 0$, potom je H pozitivně definitní tehdy a jen tehdy, pokud je $G_{nové}$ pozitivně definitní. Důkaz těchto tvrzení přináší Bazaraa, Sherali a Shetty (2006, s. 121-122).

3.3.3 Podmínky optimality

Hlavním cílem nelineární optimalizace je pochopitelně nalezení jednoho či více optimálních řešení. Je třeba rozlišovat mezi úlohami hledání volného extrému a hledání vázaného extrému. V úlohách hledání vázaného extrému je řešení omezeno soustavou

omezení, zpravidla podmínek zapsaných ve tvaru rovnic a nerovnic. V této části bude řešena situace s vázaným extrémem, neboť právě tento problém je z pohledu matematického programování podstatný.

Hlavní otázkou při hledání optimální hodnoty účelové funkce je ověření, zdali lze nalezené řešení skutečně prohlásit za optimální a zdali toto řešení vyhovuje zadaným omezením. Podmínky optimality lze vyjádřit pomocí teorie Lagrangeových multiplikátorů. Jedná se o přidané proměnné, které dokážou charakterizovat optimální řešení, ale také poskytují nezbytné informace k citlivostní analýze. V tomto smyslu lze definovat některé nutné a postačující podmínky pro existenci optimálního řešení. Ty existují v jednodušším tvaru pro omezení, která jsou striktně ve tvaru rovnic. Protože se však zpravidla v modelech vyskytují i podmínky ve tvaru nerovnic, je třeba tyto podmínky zpřesnit. Definujme nyní podmínky optimality pro modely se smíšenými omezeními typu rovnic i nerovnic. Tyto podmínky se nazývají Karush-Kuhn-Tuckerovy podmínky nebo ve zobecněném případě Fritz-Johnovy podmínky. Tyto podmínky popisují Peressini, Sullivan a Uhl (1993, s. 156-198), Bazaraa, Sherali a Shetty (2006, s. 165-210) nebo Bertsekas (1999, s. 313-335). Zde budou uvedeny základní myšlenky týkající se podmínek optimality dle posledního ze jmenovaných autorů.

Karush-Kuhn-Tuckerovy podmínky (KKT)

Uvažujme optimalizační problém, který obsahuje omezení ve tvaru rovnic i nerovnic

minimalizujte $f(\mathbf{x})$

podle

$$h_1(\mathbf{x}) = 0, \dots, h_m(\mathbf{x}) = 0$$

$$g_1(\mathbf{x}) \leq 0, \dots, g_r(\mathbf{x}) \leq 0$$

(3-3-7)

kde f, h_i, g_j jsou spojitě diferencovatelné funkce z R^n na R .

Říkáme, že vektor \mathbf{x} se nazývá regulární, pokud jsou gradienty omezení ve tvaru rovnic $\nabla h_i(\mathbf{x}), i = 1, \dots, m$ a gradienty aktivních⁴ omezení ve tvaru nerovnic $\nabla g_j(\mathbf{x}), j \in A(\mathbf{x})$ lineárně nezávislé. Lze také tvrdit, že vektor \mathbf{x} je regulární ve speciálním případě, kdy neexistují žádná omezení ve tvaru rovnic a všechna omezení ve tvaru nerovnic jsou

⁴ Omezení mohou být aktivní nebo neaktivní v závislosti na tom, zdali jsou splněna beze zbytku. Podrobněji Bertsekas (1999, s. 314).

neaktivní. Následující podmínka je zobecněním teorie Lagrangeových multiplikátorů a bude uvedena pro Lagrangeovu funkci ve tvaru

$$L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) = f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^m \lambda_i h_i(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^r \mu_j g_j(\mathbf{x}) \quad (3-3-8)$$

KKT podmínka nutná

Nechť je \mathbf{x}^* lokálním minimem úlohy (3-3-7)

Potom existují unikátní vektory Lagrangeových multiplikátorů $\boldsymbol{\lambda}^* = (\lambda_1^*, \dots, \lambda_m^*)$, $\boldsymbol{\mu}^* = (\mu_1^*, \dots, \mu_r^*)$ takové, že

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{x}} L(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\mu}^*) &= 0, \\ \mu_j^* &\geq 0, \quad j = 1, \dots, r, \\ \mu_j^* &= 0, \quad \forall j \notin A(\mathbf{x}^*), \end{aligned} \quad (3-3-9)$$

kde $A(\mathbf{x}^*)$ je množina aktivních omezení⁵ v \mathbf{x}^* . Pokud jsou navíc f, h a g dvakrát spojitě diferencovatelné, potom platí

$$\mathbf{y}' \nabla_{\mathbf{xx}}^2 L(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\mu}^*) \mathbf{y} \geq 0 \quad (3-3-10)$$

pro všechna $\mathbf{y} \in R^n$ taková, že

$$\begin{aligned} \nabla h_i(\mathbf{x}^*)' \mathbf{y} &= 0, \quad \forall i = 1, \dots, m \\ \nabla g_j(\mathbf{x}^*)' \mathbf{y} &= 0, \quad \forall j \in A(\mathbf{x}^*) \end{aligned} \quad (3-3-11)$$

KKT podmínka postačující – postačující podmínka druhého řádu

Uvažujme f, h a g jsou dvakrát spojitě diferencovatelné a nechť je $\mathbf{x}^* \in R^n$, $\boldsymbol{\lambda}^* \in R^m$ a $\boldsymbol{\mu}^* \in R^r$ vyhovují

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{x}} L(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\mu}^*) &= 0, \quad h(\mathbf{x}^*) = 0, \quad g(\mathbf{x}^*) \leq 0 \\ \mu_j^* &\geq 0, \quad j = 1, \dots, r \\ \mu_j^* &= 0, \quad \forall j \notin A(\mathbf{x}^*) \\ \mathbf{y}' \nabla_{\mathbf{xx}}^2 L(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\mu}^*) \mathbf{y} &> 0 \end{aligned} \quad (3-3-12)$$

pro všechna $\mathbf{y} \neq 0$ taková, že

$$\begin{aligned} \nabla h_i(\mathbf{x}^*)' \mathbf{y} &= 0, \quad \forall i = 1, \dots, m \\ \nabla g_j(\mathbf{x}^*)' \mathbf{y} &= 0, \quad \forall j \in A(\mathbf{x}^*) \end{aligned} \quad (3-3-13)$$

⁵ Pro každý přípustný bod \mathbf{x} je množina aktivních omezení určena jako $A(\mathbf{x}) = \{j | g_j(\mathbf{x}) = 0\}$.

Uvažujme také, že

$$\mu_j^* > 0, \quad \forall j \in A(\mathbf{x}^*) \quad (3-3-14)$$

Potom je \mathbf{x}^* ostré lokální minimum funkce f podle $h(\mathbf{x}) = 0, g(\mathbf{x}) \leq 0$.

Uvažujme úlohu

$$\begin{aligned} & \text{minimalizujte } f(\mathbf{x}) \\ & \text{podle } \mathbf{x} \in X, \quad g_j(\mathbf{x}) \leq 0, j = 1, \dots, r \end{aligned} \quad (3-3-15)$$

kde f a g_j jsou reálné funkce na R^n a X je daná podmnožina R^n .

KKT podmínka postačující - obecná postačující podmínka

Nechť je \mathbf{x}^* přípustný vektor úlohy (3-4-16), který společně s vektorem $\boldsymbol{\mu}^* = (\mu_1^*, \dots, \mu_r^*)$ vyhovuje

$$\begin{aligned} \mu_j^* &> 0, & j = 1, \dots, r \\ \mu_j^* &= 0, & \forall j \notin A(\mathbf{x}^*) \end{aligned} \quad (3-3-16)$$

a minimalizuje Lagrangeovu funkci $L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}^*)$ na $\mathbf{x} \in X$:

$$\mathbf{x}^* \in \arg \min_{\mathbf{x} \in X} L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}^*) \quad (3-3-17)$$

potom je \mathbf{x}^* globálním minimem této úlohy.

3.3.4 Algoritmy řešení

Problémy nelineárního charakteru mohou existovat v různých specifických podobách. K různým typům problémů jsou pak vhodné různé postupy hledající optimum podle zadaných omezení. V této kapitole budou stručně popsány algoritmy řešící problémy hledání vázaného extrému diferencovatelných funkcí tak, jak je uvádí Ruszczyński (2006, s. 286-331).

Projekční metoda

Pro tuto metodu uvažujme extrémální úlohu s danou množinou omezení

$$\min_{\mathbf{x} \in X} f(\mathbf{x}) \quad (3-3-18)$$

se spojitě diferencovatelnou funkcí $f: R^n \rightarrow R$ a konvexní uzavřenou množinou $X \in R^n$. Základní myšlenkou pro řešení tohoto problému je zde učinit kroky ve směru největšího spádu a navrátit se do množiny přípustných řešení, pokud se řešení ocitne mimo množinu X . Uvažuje se tedy následující iterativní proces

$$\mathbf{x}^{k+1} = \Pi_X \left(\mathbf{x}^k - \tau \nabla f(\mathbf{x}^k) \right), k = 1, 2, \dots \quad (3-3-19)$$

kde $\Pi_X(\cdot)$ je operací ortogonální projekce na množině X a τ je kladná délka kroku. Tato metoda je přímým rozšířením metody největšího spádu s konstantním krokem⁶.

Metoda redukováného gradientu

Oproti předchozí metodě zde existují jiný způsob, který zajišťuje přípustnost řešení v jednotlivých iteracích. Tato metoda uvažuje pouze přípustné směry jako možné kandidáty na další krok metody. Tato metoda je silně založená na technikách simplexového algoritmu. Základní myšlenka spočívá v generování posloupnosti přípustných bodů $\{\mathbf{x}^k\}$, přičemž tyto body se musí nacházet v rozmezí množiny přípustných řešení. Každý bod, v němž se právě nacházíme, je v rámci řešení rozdělen na tři dílčí vektory – nebazických proměnných, superbazických proměnných a bazických proměnných. S využitím těchto vektorů lze sestavit pomocnou úlohu lineárního programování. Podrobně tuto metodu popisuje Ruszczyński (2006, s. 288-297).

Penalizační metody

Hlavní myšlenkou těchto metod je aproximativně převést omezený problém na neomezený problém nebo na problém s jednoduššími omezeními. Uvažujme úlohu

$$\min_{\mathbf{x} \in X \cap X_0} f(\mathbf{x}) \quad (3-3-20)$$

kde $f: R^n \rightarrow R$ a X a X_0 jsou uzavřené podmnožiny R^n . Množina přípustných řešení je reprezentována jako průnik dvou množin, aby bylo možné přímo zacházet s omezeními $\mathbf{x} \in X_0$. Zkonstruujeme spojitou funkci $P: R^n \rightarrow R$, která má následující vlastnost:

$$\begin{aligned} P(\mathbf{x}) &= 0, \text{ pokud } \mathbf{x} \in X \\ P(\mathbf{x}) &> 0, \text{ pokud } \mathbf{x} \notin X \end{aligned} \quad (3-3-21)$$

Funkce, která splňuje tyto podmínky, se nazývá *penalizační funkce*. Lze ji využít k formulování pomocné úlohy s jednoduchými omezeními:

$$\min_{\mathbf{x} \in X_0} [\phi_\varrho(\mathbf{x}) \triangleq f(\mathbf{x}) + \varrho P(\mathbf{x})] \quad (3-3-22)$$

kde $\varrho > 0$ se nazývá *penalizační parametr*. Základní myšlenkou problému je, že výraz $\varrho P(\mathbf{x})$, který je přičítán k účelové funkci, představuje penalizaci za porušení omezení $\mathbf{x} \in X$. Předpokládá se, že pokud je ϱ dostatečně veliké, potom je řešení (3-3-20) blízko

⁶ Metoda řešící úlohu na volný extrém. Podrobně v (Ruszczyński, 2006).

řešení (3-3-22). V penalizačních metodách se dále využívá *kvadratické penalizační funkce* a *exaktní penalizační funkce*.

Bazická duální metoda

Uvažujme obecný nelineární optimalizační problém

$$\text{minimalizujte } f(\mathbf{x})$$

podle

$$g_i(\mathbf{x}) \leq 0, \quad i=1, \dots, m \quad (3-3-23)$$

$$h_i(\mathbf{x}) = 0, \quad i = 1, \dots, p$$

$$\mathbf{x} \in X_0$$

Předpokládáme, že všechny funkce $f: R^n \rightarrow R$, $g_i: R^n \rightarrow R, i = 1, \dots, m$ a $h_i: R^n \rightarrow R, i = 1, \dots, p$ jsou spojitě diferencovatelné. Množina X_0 je konvexní a uzavřená. Dále k této úloze uvažujme Lagrangeovu funkci

$$L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) = f(\mathbf{x}) + \langle \boldsymbol{\lambda}, g(\mathbf{x}) \rangle + \langle \boldsymbol{\mu}, h(\mathbf{x}) \rangle \quad (3-3-24)$$

a duální funkci

$$L_D(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) = \inf_{\mathbf{x} \in X_0} L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) \quad (3-3-25)$$

Duální úloha je potom definována následovně:

$$\max_{(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) \in \Lambda_0} L_D(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) \quad (3-3-26)$$

s $\Lambda_0 = R_+^m \times R^p$.

Předpokládejme, že funkce f a $g, i = 1, \dots, m$ jsou konvexní, funkce h_i je afinní⁷ a je splněna Slaterova podmínka⁸. Lze dokázat, že úloha (3-3-23) má optimální řešení tehdy a jen tehdy, pokud má duální úloha (3-3-26) optimální řešení. Hlavní myšlenkou duální metody je vyřešit tuto duální úlohu iterativní optimalizací s jednoduchými omezeními. Na základě řešení této úlohy lze získat řešení primární úlohy.

⁷ Funkce $f: X \rightarrow R$ se nazývá afinní na množině X , pokud pro všechna $x_1, x_2 \in X$ a každé $\lambda \in (0,1)$ platí, že $f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) = \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2)$. Grafem afinní funkce je přímka. Speciálním případem afinní funkce je lineární funkce.

⁸ Postačující podmínka pro konvexní optimalizační problém. Více o této podmínce Ruszczynski (2006, s. 107-108).

Newtonova metoda

Newtonovu metoda lze využít pro neomezenou i omezenou optimalizaci. Uvažujme následující nelineární optimalizační problém:

$$\begin{aligned} & \text{minimalizujte } f(\mathbf{x}) \\ & \text{za podmínek} \\ & g_i(\mathbf{x}) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m \\ & h_i(\mathbf{x}) = 0, \quad i = 1, \dots, p \end{aligned} \tag{3-3-27}$$

Předpokládáme, že funkce $f: R^n \rightarrow R$, $g_i: R^n \rightarrow R$, $i = 1, \dots, m$ a $h_i: R^n \rightarrow R$, $i = 1, \dots, p$ jsou dvakrát spojitě diferencovatelné. Nebude zde uvažováno obecné omezení ve tvaru $\mathbf{x} \in X_0$. Místo toho bude využito explicitního zápisu ve tvaru rovnic a nerovnic. Dále je definována Lagrangeova funkce $L: R^n \times R^m \times R^p \rightarrow R$ ve tvaru

$$L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) = f(\mathbf{x}) + \langle \boldsymbol{\lambda}, g(\mathbf{x}) \rangle + \langle \boldsymbol{\mu}, h(\mathbf{x}) \rangle \tag{3-3-28}$$

Nutné podmínky optimality u této úlohy přejdou do podoby soustavy nelineárních rovnic a nerovnic:

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{x}} L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) &= \mathbf{0} \\ g(\mathbf{x}) &\leq \mathbf{0} \\ h(\mathbf{x}) &= \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\lambda} &\geq \mathbf{0} \\ \langle \boldsymbol{\lambda}, g(\mathbf{x}) \rangle &= 0 \end{aligned} \tag{3-3-29}$$

Uvažujme kužel $K = R_+^m \times R^p$. Výše uvedená soustava pak může být zapsána jako

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{x}} L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) &= \mathbf{0} \\ \begin{bmatrix} g(\mathbf{x}) \\ h(\mathbf{x}) \end{bmatrix} &\in N_K(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) \end{aligned} \tag{3-3-30}$$

Poslední relace ukazuje, že $(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) \in K$, v opačném případě je $N_K(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) = \emptyset$.

Samotná Newtonova metoda pak může být formulována následovně. V iteraci k při daném přibližném řešení \mathbf{x}^k a multiplifikátorech $(\boldsymbol{\lambda}^k, \boldsymbol{\mu}^k)$ pak řešíme problém tangenciálního kvadratického programování:

minimalizujte $\langle \nabla f(\mathbf{x}^k), d \rangle + \frac{1}{2} \langle d, [\nabla_{\mathbf{xx}}^2 L(\mathbf{x}^k, \boldsymbol{\lambda}^k, \boldsymbol{\mu}^k)] d \rangle$

za podmínek

(3-3-31)

$$g(\mathbf{x}^k) + g'(\mathbf{x}^k)d \leq 0$$

$$h(\mathbf{x}^k) + h'(\mathbf{x}^k)d = 0$$

Označme řešení této úlohy jako \mathbf{d}^k a Lagrangeovy multiplikátory související s omezeními úlohy jako $\hat{\boldsymbol{\lambda}}^k$ a $\hat{\boldsymbol{\mu}}^k$. Potom přepočítáme přibližné řešení a multiplikátory pomocí

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + \tau_k \mathbf{d}^k$$

$$\boldsymbol{\lambda}^{k+1} = \hat{\boldsymbol{\lambda}}^k \quad (3-3-32)$$

$$\boldsymbol{\mu}^{k+1} = \hat{\boldsymbol{\mu}}^k$$

a iterace pokračuje dále. Zde je $\tau_k \in (0, 1)$ koeficientem délky kroku. Tento algoritmus se také někdy nazývá *sekvenční metoda kvadratického programování*.

Bariérové metody

Uvažujme úlohu

Minimalizujte $f(\mathbf{x})$

za podmínky

(3-3-33)

$$g_i(\mathbf{x}) \leq 0, i = 1, \dots, m$$

Předpokládejme, že všechny funkce v úloze jsou dvakrát spojitě diferencovatelné. Pro zjednodušení zde nejsou zahrnuta omezení ve tvaru rovnic. Také zde není dodatečná množina omezení ve tvaru $\mathbf{x} \in X_0$. Přestože lze bariérové metody aplikovat i pro tyto případy, samotná numerická implementace je v takových případech značně obtížná.

Uvedený problém lze převést na ekvivalentní problém sestávající z lineárních nerovnic a nelineárních rovnic:

minimalizujte $f(\mathbf{x})$

za podmínek

(3-3-34)

$$g_i(\mathbf{x}) + z_i = 0, i = 1, \dots, m$$

$$z_i \geq 0, i = 1, \dots, m$$

Dalším krokem je odstranění omezení ve tvaru nerovnic formulováním aproximační úlohy

$$\begin{aligned} & \text{minimalizujte } f(\mathbf{x}) - \sigma \sum_{i=1}^m \ln(z_i) \\ & \text{za podmínky} \end{aligned} \tag{3-3-35}$$

$$g_i(\mathbf{x}) + z_i = 0, i = 1, \dots, m$$

V této úloze je σ kladným parametrem a budeme implicitně předpokládat, že hledáme řešení pro $z_i > 0$. Hlavní myšlenkou řešení problému je, že funkce $-\sigma \ln(z_i)$ vytvoří „bariéru“ blízko hranic kuželu R_+^m , čímž zabrání z_i , aby se dostalo příliš blízko těmto hranicím. Předpokládá se, že pokud $\sigma \rightarrow 0$, potom se řešení úlohy (3-3-35) blíží řešení úlohy (3-3-34). Metoda řešící omezený optimalizační problém pomocí sekvence aproximačních problémů (3-3-35) se nazývá *bariérová metoda*.

3.4 Poznámky k nekonvexní optimalizaci

Nekonvexní optimalizace předpokládá, na rozdíl od všech výše uvedených modelů, že množina přípustných řešení nebo účelové funkce nemají konvexní charakter. Problematiku nekonvexní optimalizace stručně popisují Rubinov a Young (2003) v úvodu své monografie následujícím způsobem.

Lagrangeovy a penalizační funkce jsou velmi osvědčenými přístupy pro omezenou optimalizaci, a to jako teoretický nástroj, tak i nástroj výpočetní. U nekonvexních omezených optimalizačních problémů však použití klasických Lagrangeových metod nemusí nalézt optimum, protože zde není vždy zajištěn předpoklad *zero gap duality*⁹. U klasických kvadratických penalizačních funkcí je obecně vyžadován velký penalizační parametr, aby bylo zajištěno, že penalizační úloha bude co nejpřesnější aproximací původní úlohy. Je známo, že penalizační funkce s příliš velkými parametry jsou překážkou pro výpočetní stránku řešení problému. Naskýtá se tedy otázka, jak zobecnit klasické Lagrangeovy a penalizační funkce, aby bylo možné problémy omezené optimalizace redukovat na problémy neomezené optimalizace, které budou

⁹ Tato vlastnost udává rozdíl mezi hodnotou optima primárního a duálního problému. U optimalizačních problémů, které splňují předpoklad *silné duality*, tj. že primární i duální problém přináší stejné optimum, je tento rozdíl nulový.

použitelné pro dostatečně širokou skupinu optimalizačních problémů z hlediska teoretického i výpočetního.

Jedním z přístupů, který tento problém řeší, je konstrukce problému neomezené optimalizace, ve kterém účelová funkce vznikne jako konvoluce¹⁰ původní účelové funkce a funkcí omezení původního problému. Lineární konvoluce vede na obyčejnou Lagrangeovu funkci, odlišné typy nelineárních konvolucí však potřebují své vlastní zobecnění. Tyto funkce, které zde figurují jako konvoluce účelové funkce a funkcí omezení nazývají Rubinov a Young (2003) *funkcemi Lagrangeovského typu* (originálně Lagrange-type functions). Ve stejné monografii jsou popsány přístupy pro tyto typy funkcí velmi podrobně rozebrány.

Problém nekonvexní optimalizace popisuje i Tuy (1998, s. 277). Uvádí dva obecné aspekty nekonvexnosti, kterým je třeba věnovat zvýšenou pozornost. V první řadě je to úroveň nekonvexnosti, kterou, zjednodušené řečeno, lze vyjádřit jako počet nekonvexních proměnných v úloze. Druhým aspektem je pak stupeň nekonvexnosti, kterého tyto proměnné dosahují. Nejnižší stupeň nekonvexnosti mají pak lineární a kvadratické nekonvexní funkce. Kvadratické optimalizační modely jsou důležité z několika důvodů:

- Kvadratické funkce jsou nejjednodušší hladké *d.c. funkce*¹¹, jejichž derivace lze snadno nejen získat, ale také s nimi dále operovat.
- Každá dvakrát diferencovatelná funkce může být aproximována kvadratickou funkcí v okolí daného bodu, takže v jistém slova smyslu jsou kvadratické modely ty nejpřirozenější.
- Četné aplikace v ekonomii, inženýrství a ostatních oborech vedou na kvadratický nekonvexní optimalizační problém. Pomocí těchto problémů lze taky zkoumat některé kombinatorické optimalizační problémy.

Problémy nekonvexní optimalizace lze také řešit jako úlohy víceúrovňového programování. Dempe (2010) popisuje tento typ matematického programování jako víceúrovňové programování. Jedná se o optimalizační problémy, které obsahují druhý (parametrický) optimalizační problém jako součást vlastních omezení úlohy.

¹⁰ Pojem z funkcionální analýzy. Jedná se o operátor vyjadřující zpracování dvou funkcí.

¹¹ D.C. struktury jsou komplementární konvexní struktury, které jsou zásadními matematickými strukturami v podstatě pro všechny nekonvexní optimalizační problémy (Tuy, 1998, s. 83).

Z matematického hlediska jsou problémy víceúrovňového programování komplikované. Jedná se o NP-těžké¹² problémy. Formulace těchto problémů je obtížná sama o sobě. Při převedení těchto problémů na jednoúrovňové problémy matematického programování není zajištěna podmínka regularity v žádném přípustném bodu. Tyto problémy se řeší parametrickým programováním, jsou zde však definovány odlišné podmínky optimality (např. přeformulované podmínky KKT) a také odlišné algoritmy řešení.

3.5 Po částech lineární funkce

3.5.1 Teoretická východiska

Po částech lineární funkce mohou být reprezentovány mnoha odlišnými způsoby. Na konci sedmdesátých let byly poprvé představeny modely sloužící k popisu po částech lineárních funkcí. Od té doby bylo vyvíjeno značné úsilí v hledání takového popisu explicitního modelu, kterým by bylo možné modelovat všechny spojité po částech lineární funkce. Následující definice a základní popis typů modelů uvádí Leenaerts a van Bokhoven (2010, s. 31-34).

Předpokládá se, že veškeré po částech lineární funkce jsou funkce spojité a odpovídají souboru zobrazení:

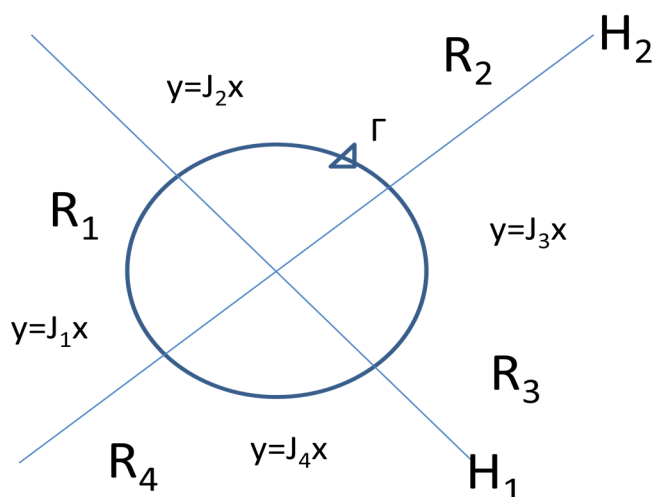
$$f: R^n \rightarrow R^m; \mathbf{x} \rightarrow f(\mathbf{x}) \quad (3-5-1)$$

Po částech lineární funkce sestává z několika lineárních zobrazení, kde její hodnota pro každý segment proměnných je popisována právě jednou lineární funkcí. Každé toto zobrazení je platné pouze v určitém podprostoru, který se nazývá polyedr. Tento polyedr je ohraničen množinou lineárních útvarů, které se nazývají nadroviny. Každá nadrovina je definována jako:

$$\mathbf{a}^T \mathbf{x} + \mathbf{b} = 0 \quad (3-5-2)$$

Tato situace je znázorněna na obrázku 3.3.

¹² Třída problémů z teorie výpočetní složitosti. O NP-těžkých problémech například v (Fortnow, 2009).



Obrázek 3.3: Zobrazení nadrovin,
dle Leenaerts a van Bokhoven (2010, s. 32)

Existují zde čtyři oblasti $R_1 \dots, R_4$ s různými lineárními funkcemi s Jacobiho maticemi¹³ $J_1 \dots, J_4$ pro jednotlivá lineární zobrazení. Tyto čtyři oblasti jsou odděleny dvěma nadrovinami H_1 a H_2 . Protože je funkce f spojitá, funkční hodnoty musí být na hranicích těchto nadrovin nutně totožné. Například přechod z oblasti R_1 do R_2 překročením nadroviny H_1 lze vyjádřit jako:

$$\{x \in H_1 | J_1 x = J_2 x\} \quad (3-5-3)$$

Protože je hranice dimenze $n - 1$, musí mít ΔJ hodnotu 1. Potom lze celou tuto hranici definovat podmínkou pomocí normálového vektoru jako $\mathbf{a}^T \mathbf{x} = 0$. Protože však shoda na hranicích musí platit pro každé x (nezáleží na tom, ve kterém bodě je tato hranice překročena) a hranice samotná je definována jako normálový vektor, liší se ΔJ od \mathbf{a}^T pouze reálnou konstantou c . Proto musí platit $\Delta J = c \mathbf{a}^T$. Velikost této konstanty bude pochopitelně stejná pro rozdíl mezi J_3 a J_4 , neboť nezáleží na tom, ve kterém bodě bude hranice překročena.

Předpokládejme, že obrázek 3.3 zobrazuje situaci v R^2 . Na obrázku 3.3 je prostor rozdělen do čtyř oblastí. Další přidaná nadrovina procházející stejným společným bodem již existujících nadrovin by způsobila degeneraci. Je to z toho důvodu, že pokud

¹³ Jacobiho matice nebo Jacobiova matice je speciální typ matice parciálních derivací. Podrobněji o tomto tématu pojednává např. Rektorys (1973, s. 374).

jsou v R^2 nezávisle zvoleny dva normálové vektory, potom je třetí normálový vektor závislý na prvních dvou.

Definice

Uzel $n - 1$ hranic v R^n je degenerovaný, jestliže se tři nebo více z nich setkají v $n - 2$ rozměrné varietě.

Obecně existují dva přístupy definování vztahu mezi argumentem a hodnotou funkce. V explicitních modelech lze pro dané hodnoty argumentu snadno získat funkční hodnoty prostým dosazením do funkčního předpisu. V implicitním modelu tomu tak není. Je potřeba algoritmus, pomocí něž je funkční hodnota vypočítána. V teorii po částech lineárních funkcí existuje silný vztah mezi implicitními a explicitními modely. Aby bylo možné tento vztah popsat, je třeba uvést následující definice.

Definice

Nechť je $\mathbf{a} \in R^n$. Potom absolutní hodnota vektoru \mathbf{a} je definována jako $|\mathbf{a}| = (|\mathbf{a}_1|, |\mathbf{a}_2|, \dots, |\mathbf{a}_n|)^T$.

Pro transformaci implicitního popisu na explicitní je nutné užít funkce absolutní hodnoty. Tuto transformaci lze popsat jako:

Definice

Nechť je $z, u, j \in R^n$ a n -rozměrný vektor $\boldsymbol{\phi}$ dán jako $\boldsymbol{\phi}(z)_k = h(z)_k$, kde index k vyjadřuje k -tý prvek vektoru a h je skalární funkce. Pro ryze rostoucí $h: R_+ \rightarrow R_+$ a $h(0) = 0$ je transformace $z \rightarrow u, j$ definována jako $u = \boldsymbol{\phi}(|z| + z), j = \boldsymbol{\phi}(|z| - z)$ a nazývána transformací pomocí funkce absolutní hodnoty.

Je třeba říci, že transformace pomocí funkce absolutní hodnoty automaticky zajistí, že $u \geq 0, j \geq 0, \mathbf{u}^T j = 0$. Vektory, které těmto třem podmínkám vyhovují, se nazývají komplementární vektory.

Explicitní po částech lineární modely využívají právě funkce absolutní hodnoty, kdežto implicitní modely jsou založeny na vnitřních komplementárních stavových proměnných.

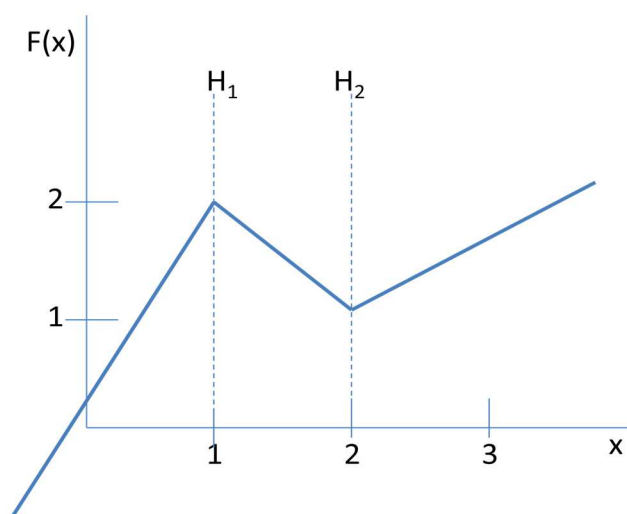
3.5.2 Explicitní po částech lineární modely

V této kapitole budou uvedeny nejvýznamnější po částech lineární modely, tak jak je shrnují Leenaerts a van Bokhoven (2010, s. 34-43). Historie vývoje po částech lineárních modelů začíná v roce 1977, kdy Chua a Kang (1977) představili článek definující po částech lineární model. O rok později popsali Kang a Chua (1978) obecný

model po částech lineárního programování více proměnných. Od té doby proběhlo mnoho pokusů o rozšíření tohoto modelu, aby byl nalezen pokud možno co nejobecnější po částech lineární model aplikovatelný pro všechny situace.

Model Chua

Předpokládejme funkci jedné proměnné $y = f(x)$ tak, jak je znázorněna na obrázku 3.4. Nadroviny rozdělující lineární segmenty jsou zde redukovány na pouhé body. Z toho důvodu každá nadrovina odděluje pouze dva prostory oblasti R^1 . Není možné, aby se tyto nadroviny navzájem protínaly.



Obrázek 3.4: Příklad po částech lineární funkce $f: R^1 \rightarrow R^1$, dle Leenaerts a van Bokhoven (2010, s. 35)

V tomto případě jsou tyto dvě nadroviny definovány jako:

$$\begin{aligned} H_1: x - 1 &= 0 \\ H_2: x - 2 &= 0 \end{aligned} \tag{3-5-4}$$

Každá nadrovina při překročení přispívá určitou hodnotou do po částech lineární funkce.

V tomto případě je funkční předpis

$$y = f(x) = \frac{5}{4}x - \frac{3}{2}|x - 1| + \frac{3}{4}|x - 2| \tag{3-5-5}$$

Uvedený příklad poukazuje na obecnou myšlenku, na které je model, který popisují Kang a Chua (1978), založen. Formální definici kanonické funkce $f: R^n \rightarrow R^m$ lze vyjádřit jako:

$$f(x) = \mathbf{a} + \mathbf{B}x + \sum_{i=1}^{\sigma} c_i |\langle \alpha_i, x \rangle - \beta_i| \tag{3-5-6}$$

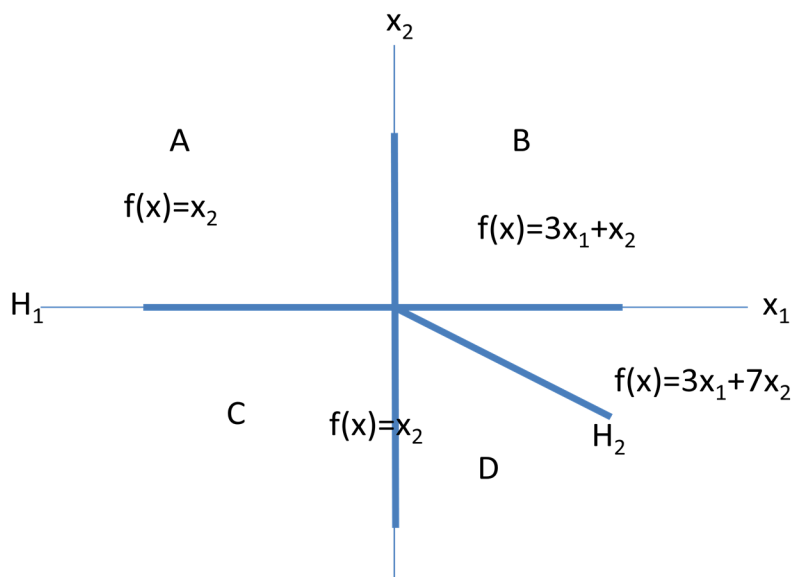
kde $B \in R^{m \times n}$, $a, c_i \in R^m$, $\alpha_i \in R^n$ a $\beta_i \in R^1$ pro $i \in \{1, \dots, \sigma\}$ a nadrovina H_i je vyjádřena jako:

$$\alpha_i^T x - \beta_i = 0 \quad (3-5-7)$$

Ve více než dvourozměrném modelu se tyto nadroviny mohou vzájemně protínat a mohou existovat taková geometrická omezení modelu, která neumožňují využití tohoto modelu pro všechny funkce více proměnných. Leenaerts a van Bokhoven (2010) však dokazují, že pokud rozdělení prostoru není degenerované, potom může být pomocí modelu *Chua* znázorněna každá po částech lineární funkce.

Model Güzelis

Problém modelu *Chua* spočívá v tom, že nadroviny jsou zde v pravém slova smyslu rovinami. To vyústí ve skutečnost, že některé geometrické struktury nelze pomocí modelu *Chua* znázornit. Taková situace je znázorněna na následujícím obrázku.



Obrázek 3.5: Geometrický prostor,
dle Leenaerts a van Bokhoven (2010, s. 38)

Aby bylo možné se vypořádat s tímto problémem, Güzelis a Gökmar (1991) navrhuji možnost, že samotné nadroviny by byly taktéž po částech lineární. Aby tento model nebyl zbytečně složitý, jsou tyto po částech lineární nadroviny definovány jako nadroviny v užším slova smyslu, aby bylo možné definovat jejich hranice. Tato situace je zobrazena právě na obrázku 3.5.

Nadrovina H_1 je hranicí v pravém slova smyslu. Nadrovina H_2 je po částech lineární rovinou, která využívá nadroviny H_1 k definování svých dvou úseků. Taková po částech lineární nadrovina H_j může být definována pomocí modelu *Chua* jako:

$$\delta_j + \gamma_j^T x + \sum_{i=1}^{\sigma} d_{ji} |\alpha_i^T x + \beta_i| = 0 \quad (3-5-8)$$

Tyto nadroviny využívají σ omezení v pravém slova smyslu. Například na obrázku 3.5 vyplývá ze vztahu (3-5-8), že tyto roviny lze definovat jako $x_2 = 0$ a $x_1 + x_2 - |x_2| = 0$. Pokud by existovalo τ nadrovin ve tvaru (3-5-8), potom lze model *Güzelis* kompletně popsat jako:

$$f(x) = a + Bx + \sum_{i=1}^{\sigma} b_i |\alpha_i^T x + \beta_i| + \sum_{j=1}^{\tau} c_j \left| \delta_j + \gamma_j^T x + \sum_{i=1}^{\sigma} d_{ji} |\alpha_i^T x + \beta_i| \right| \quad (3-5-9)$$

Tento model je kanonický pouze v případě, že je zachována vlastnost konzistentní změny. Uvažujme situaci na obrázku 3.5. Pro dva sousedící regiony D a C s hranicí H_2 musí být změna Jacobiho matice totožná se změnou matice pro sousedící regiony B a A . Proto je míra změny této matice nezávislá na tom, ve kterém bodě je hranice H_2 překročena. Pro H_2 platí:

$$\begin{aligned} J_D - J_C &= (3,7) - (0,1) = \hat{k}_1^1(1,2) \rightarrow \hat{k}_1^1 = 3 \\ J_B - J_A &= (3,1) - (0,1) = \hat{k}_1^2(1,0) \rightarrow \hat{k}_1^2 = 3 \end{aligned} \quad (3-5-10)$$

k -parametry nezávislých nadrovin jsou závislé na po částech lineárních nadrovinách:

$$k_i = \bar{k}_i + \sum_j \hat{k}_j d_{ij} \quad (3-5-11)$$

kde \hat{k}_i značí k -parametry patřící do po částech lineární nadroviny a \bar{k}_i konstantu pro překročení. Pro H_1 dostaneme:

$$\begin{aligned} J_A - J_C &= (0,1) - (0,1) = k_2^1(0,1) \rightarrow k_2^1 = 0 \\ J_B - J_D &= (3,1) - (3,7) = k_2^2(0,1) \rightarrow k_2^2 = -6 \end{aligned} \quad (3-5-12)$$

z toho:

$$\begin{aligned} k_2^1 &= \bar{k}_2^1 - (3)(-1) \rightarrow \bar{k}_2^1 = -3 \\ k_2^2 &= \bar{k}_2^2 + (3)(-1) \rightarrow \bar{k}_2^2 = -3 \end{aligned} \quad (3-5-13)$$

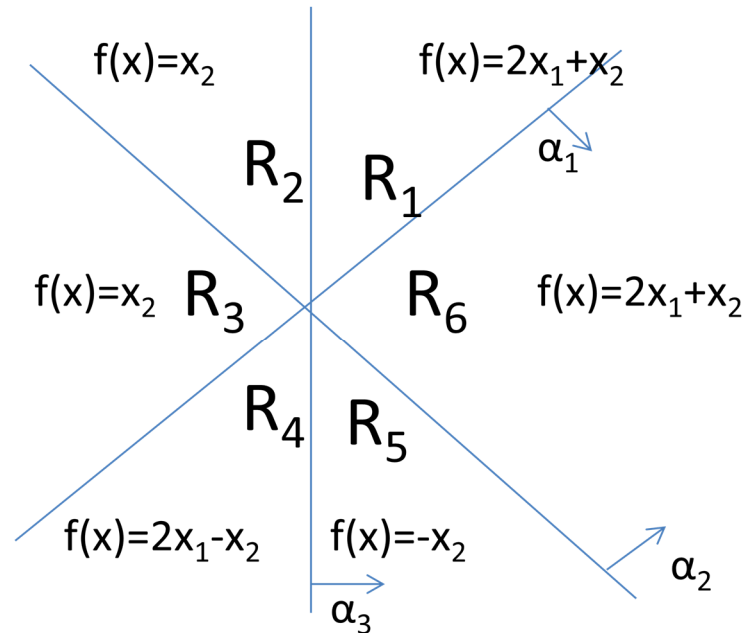
Konzistentní změna je tedy dodržena. Potom lze již odvodit kompletní předpis funkce z obrázku 3.5:

$$f(x) = (1,5 \ 2,5) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + (-1,5)|x_2| + (1,5)|x_1 + x_2 - |x_2|| \quad (3-5-14)$$

Bez po částech lineárních nadrovin by tento model byl stejný jako model *Chua*. Model *Güzelis* je tedy obecnější než model, který navrhli Chua a Kang (1977).

Model Kahlert

Aby byly překlenuty nedostatky předchozích dvou modelů, Kahlert a Chua (1992) představili nový model. Jedním z problémů předchozích dvou modelů byla degenerace v průsečících, které tak nemají zajištěnu vlastnost konzistentní změny. Příklad takové situace je uveden na následujícím obrázku:



Obrázek 3.6: Příklad modelu Kahlert,
dle Leenaerts a van Bokhoven (2010, s. 40)

Ve dvourozměrném prostoru jsou tři nadroviny, které se protínají v jediném bodě. Lze zvolit pouze dva nezávislé normálové vektory, třetí normálový vektor lze vytvořit jako lineární kombinaci z této nezávislé množiny. Protože jsou nadroviny v pravém slova smyslu rovinami, není zaručena konzistentní změna mezi regiony R_2 a R_3 v souvislosti s R_5 a R_6 . Kahlert a Chua (1990) uvádějí následující popis modelu:

$$f(x) = \mathbf{a} + \mathbf{B}x + \sum_{i=1}^{\sigma} c_i |\langle \alpha_i, x \rangle - \beta_i| + \phi(x) \quad (3-5-15)$$

kde $\phi(x)$ je nezbytné k odstranění porušení vlastnosti konzistentní změny. Uvažujme, že $\phi(x) = 0$. Potom je tento model shodný z modelem *Chua*, který vlastnost konzistentní změny má. V příkladu na obrázku 3.6 je prostor degenerovaný a je třeba do popisu modelu zahrnout parametr $\phi(x)$. Ten je potom vyjádřen jako:

$$\phi(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{\rho} \sum_{k=3}^{\delta^j} \tilde{c}_{j,jk} \left\{ \left| a_{k,j1}^j (\langle \alpha_{j1}, \mathbf{x} \rangle - \beta_{j1}) \right| + a_{k,j2}^j (\langle \alpha_{j2}, \mathbf{x} \rangle - \beta_{j2}) \right| \\ - \left| a_{k,j1}^j (\langle \alpha_{j1}, \mathbf{x} \rangle - \beta_{j1}) + a_{k,j2}^j (\langle \alpha_{j2}, \mathbf{x} \rangle - \beta_{j2}) \right| \right\} \quad (3-5-16)$$

pro $\tilde{c}_{j,jk} \in R^m$, $\alpha_{j1}, \alpha_{j2} \in R^n$, $\beta_{j1}, \beta_{j2}, a_{k,j1}^j, a_{k,j2}^j \in R^1$.

První suma v tomto vztahu zahrnuje všechny degenerované průsečíky u zlomů. Vnitřní suma zahrnuje pro každý degenerovaný průsečík všechny roviny, které degeneraci způsobují. Protože jsou tyto průsečíky degenerované, je možné zvolit podmnožinu nezávislých vektorů, kde ostatní normálové vektory mohou být vytvořeny jako lineární kombinace z této podmnožiny. Substitucí bodu z každé oblasti za $\phi(\mathbf{x})$ je možné určit skutečnou hodnotu parametru $\phi(\mathbf{x})$.

V příkladu na obrázku 3.6 je pouze jediné degenerované řešení, proto může být první suma ve vzorci (3-5-16) vynechána. V tomto příkladu mohou být libovolně zvoleny dva normálové vektory, například α_1 a α_2 . Protože vnitřní suma ve vztahu (3-5-16) nyní zahrnuje pouze rovinu s normálovým vektorem α_3 , může být tato suma ze vztahu vynechána. Tento normálový vektor lze odvodit jako $\alpha_3 = \mathbf{a}_1 \alpha_1 + \mathbf{a}_2 \alpha_2$ pro $\mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_2 = 1$. Kombinace $\mathbf{a}_1 \alpha_1 - \mathbf{a}_2 \alpha_2$ určuje rovinu $x_2 = 0$. Substitucí některých bodů pak funkce $\phi(x)$ v geometrickém slova smyslu vypadá následovně:

$$\begin{aligned} R_1: 2\tilde{c}\mathbf{a}_2\alpha_2^T x &\cong J_\phi^1 \\ R_2: -2\tilde{c}\mathbf{a}_1\alpha_1^T x &\cong J_\phi^2 \\ R_3: 0 & \\ R_4: 2\tilde{c}\mathbf{a}_2\alpha_2^T x &\cong J_\phi^1 \\ R_5: -2\tilde{c}\mathbf{a}_1\alpha_1^T x &\cong J_\phi^2 \\ R_6: 0 & \end{aligned} \quad (3-5-17)$$

Ve formátu podle Kahlerta lze pak tuto funkci zapsat jako:

$$\begin{aligned} f(x) &= x_1 + x_2 \\ &+ \frac{1}{2} \{ |x_1 + x_2| + |x_1 - x_2| + ||x_1 + x_2| + x_1 - x_2| \\ &- |x_1 + x_2 + |x_1 - x_2|| \} \end{aligned} \quad (3-5-18)$$

Tímto modelem lze vyjádřit každou dvojrozměrnou po částech lineární funkci. Kahlert a Chua (1992) dále navrhuje další model, který tento model rozšiřuje pro více než dvě dimenze. Tento článek pouze pojednává o geometrické podstatě, popis modelu zde uveden není.

Model Huertas

V roce 1984 představili Huertas, Rueda a Rodriguez-Vaguez (1984) explicitní po částech lineární model, který je od modelu *Chua* poněkud odlišný:

$$f(x) = \mathbf{a} + \mathbf{B}x + \sum_{i=1}^{\sigma} \{c_i |\langle \alpha_i, x \rangle - \beta_i| + h_i \operatorname{sgn}(\langle \alpha_i, x \rangle - \beta_i)\} \quad (3-5-19)$$

kde $\operatorname{sgn}(x)$ značí funkci signum¹⁴. Výhodou tohoto modelu je sice možnost modelovat také nespojitě funkce, jsou zde však dva zásadní nedostatky:

- Nejedná se o kompaktní popis problematiky, neboť zde není plně využito výhody spojitosti daných po částech lineárních funkcí. Proto v těchto situacích není model kanonický.
- V sestavování modelu existují určité nejasnosti, neboť postup není pevně dán.

Z těchto důvodů není tento model příliš dobře akceptován a nevyužívá se.

3.6 Algoritmy řešení po částech lineárních modelů

Leenaerts a van Bokhoven (2010) uvádějí, že pokud je dán implicitní popis po částech lineárního modelu, potom je třeba takový algoritmus, který nalezne odpovídající výstupní vektor pro daný vstupní vektor. Tento problém je znám jako Problém lineární komplementarity (originálně Linear complementary problem) a jako první jej popsali Cottle a Dantzig (1968).

Problém lineární komplementarity

Tento model je často uváděn v souvislosti s úlohami kvadratického programování. V české literatuře jej interpretuje například Rohn (2002) následujícím způsobem.

Problémem lineární komplementarity nazýváme problém

$$\begin{aligned} \mathbf{y} &= \mathbf{M}\mathbf{z} + \mathbf{q} \\ \mathbf{y} &\geq \mathbf{0}, \mathbf{z} \geq \mathbf{0} \\ \mathbf{y}^T \mathbf{z} &= 0 \end{aligned} \quad (3-6-1)$$

kde M je čtvercová matice $n \times n$. Za předpokladu podmínek nezápornosti lze třetí rovnici zapsat jako

$$y_j z_j = 0, (j = 1, 2, \dots, n) \quad (3-6-2)$$

¹⁴ Funkce signum nebo taky znaménková funkce je speciální lichá funkce, která vrací znaménko reálného čísla. Více o této funkci Weisstein.

Pro každé j má tedy alespoň jedna z proměnných y_j, z_j nulovou hodnotu. Pro každé j se nazývají proměnné y_j, z_j komplementární. Z toho je odvozen i název této úlohy. Nejedná se o optimalizační problém, protože zde neexistuje žádná účelová funkce. Cílem je pouze nalézt řešení soustavy, která je však vzhledem ke třetí podmínce nelineární (Rohn, 2002).

3.6.1 Využití problému lineární komplementarity v lineárním programování

V modelech po částech lineárního programování existují analogie s modely lineárního programování. Jednou z možností, jak tyto modely řešit, je využití problému lineární komplementarity, jak ji popisuje Leenaerts a van Bokhoven (2010, s. 103-104). Tyto souvislosti jsou však již známy delší dobu – popisuje je například de Moor (1988). Jinou možností je převod na model lineárního programování pomocí přidání proměnných, tak jak jej popisuje Houška a Brožová (2002). V následující kapitole jsou popsány oba přístupy.

Uvažujme následující primární úlohu:

$$\begin{aligned} \mathbf{c}^T \mathbf{x} &\rightarrow \max \\ \mathbf{A} \mathbf{x} &\leq \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\geq \mathbf{0} \end{aligned} \quad (3-6-3)$$

Pro každý primární problém lze definovat problém duální. V tomto případě dostaneme model:

$$\begin{aligned} \mathbf{b}^T \mathbf{y} &\rightarrow \min \\ \mathbf{A}^T \mathbf{y} &\geq \mathbf{c} \\ \mathbf{y} &\geq \mathbf{0} \end{aligned} \quad (3-6-4)$$

Protože se jedná o úlohy duálně sdružené, v bodě optima musí platit pro dvě přípustná řešení

$$\mathbf{c}^T \mathbf{x} = \mathbf{b}^T \mathbf{y} \quad (3-6-5)$$

Přidáním doplňkových proměnných \mathbf{v} a \mathbf{w} do obou modelů dostaneme:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{v} &= \mathbf{b} \\ \mathbf{A}^T \mathbf{y} - \mathbf{w} &= \mathbf{c} \\ \mathbf{x}, \mathbf{v}, \mathbf{y}, \mathbf{w} &\geq \mathbf{0} \end{aligned} \quad (3-6-6)$$

Tento zápis již lze převést na:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{w} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{A}^T \\ -\mathbf{A} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\mathbf{c} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} \quad (3-6-7)$$

Na tuto úlohu lze nahlížet jako na problém lineární komplementarity, protože rozhodovací bazická proměnná odpovídá doplňkové nebazické atd.

$$\mathbf{v}^T \mathbf{y} + \mathbf{w}^T \mathbf{x} = 0 \quad (3-6-8)$$

je třeba nalézt odpovídající u a j . Získáním hodnoty u dostáváme řešení pro primární i duální model, a tedy i hodnotu účelové funkce obou modelů.

3.7 Model po částech lineárního programování

Houška a Brožová (2002) ukazuje, jakým způsobem je možné převést konvexní model po částech lineárního programování na obyčejný model lineárního programování, který je pak možné řešit standardním simplexovým algoritmem. Houškův transformovaný model navazuje na Laščiaka (1983), který obecný model po částech lineárního programování definuje z odlišného hlediska než předchozí uvedené modely v kapitolách 3.5.1 a 3.5.2.

Houška (2002) využívá následující definici obecného modelu po částech lineárního programování:

maximalizujte $Z(\mathbf{x})$

za podmínek

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$$

$$x_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n$$

kde

(3-7-1)

$$Z(\mathbf{x}) = Z_1(x_1) + Z_2(x_2) + \dots + Z_n(x_n),$$

$$Z_j(x_j) = Z_{j1}(x_j), x_j \in \langle 0, k_{j1} \rangle,$$

$$Z_j(x_j) = Z_{j2}(x_j), x_j \in \langle k_{j1}, k_{j2} \rangle$$

⋮

$$Z_j(x_j) = Z_{jp_j}(x_j) \in \langle k_{jp_j}, \infty \rangle, j = 1, 2, \dots, n$$

A všechny účelové funkce $Z_j(x_j)$ jsou lineární. Hodnoty proměnných k_{jp_j} představují hranice intervalu, na němž je příslušná dílčí lineární funkce definována.

Houška a Brožová (2002) pak navrhuje transformaci tohoto modelu do následující podoby:

maximalizujte $Z(\mathbf{x}, \mathbf{r})$

za podmínek

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n a_{ij}x_{ij} &\leq b_i, i = 1, 2, \dots, m; x_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n, \\ x_j + r_{j(2k-1)} - r_{j(2k)} &= k_{jk}, j = 1, 2, \dots, n, k = 1, 2, \dots, p_j \\ r_{jk} &\geq 0, j = 1, 2, \dots, n; k = 1, 2, \dots, p_j \\ r_{j(2k-1)} \cdot r_{j(2k)} &= 0, j = 1, 2, \dots, n, k = 1, 2, \dots, p_j \end{aligned} \quad (3-7-2)$$

kde

$$Z(\mathbf{x}, \mathbf{r}) = \sum_{j=1}^n c_j x_j + \sum_{k=1}^{p_j} c_{jk} r_{jk}, j = 1, 2, \dots, n$$

$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b, i = 1, 2, \dots, m$ jsou původní omezení úlohy,

$x_j + r_{j(2k-1)} - r_{j(2k)} = k_{jk}, j = 1, 2, \dots, n, k = 1, 2, \dots, p_j$, jsou přidána omezení pro tzv. *rozdílové proměnné*¹⁵ se vzdáleností zleva $r_{j(2k-1)}$ a se vzdáleností zprava $r_{j(2k)}$.

c_j a c_{jk} jsou cenové koeficienty.

Úloha obsahuje též podmínku nezápornosti pro všechny uvedené proměnné. Nelineární podmínku $r_{j(2k-1)} \cdot r_{j(2k)} = 0$ lze v případě využití simplexového algoritmu ignorovat, neboť jak dokazuje Houška a Brožová (2002), porušení těchto podmínek by vždy vedlo ke zhoršení účelové funkce, proto jejich současná přítomnost v bázi není žádoucí a z hlediska podstaty simplexového algoritmu není možná.

Tento po částech lineární model lze tedy řešit klasickým simplexovým algoritmem a v případě konvexní po částech lineární účelové funkce je v konečném počtu kroků simplexového algoritmu nalezeno optimální řešení. K tomuto modelu lze taktéž v případě potřeby sestavit model duální, jehož konstrukci popisuje Hlavatý (2012). Houška a Brožová (2002) nebo Houška (2005) také poukazují na možnosti řešení modelů s nekonvexní po částech lineární účelovou funkcí. Jako jednu z možností Houška (2005) uvádí zavedení bivalentních proměnných do modelu po částech lineárního programování. Tato varianta s sebou ovšem přináší vyšší výpočetní náročnost. Druhý přístup navrhuje Houška (2003) bez použití bivalentních proměnných v modelu. Tento postup ukazuje, jak je možné pracovat s modelem s nekonvexní

¹⁵ O těchto proměnných podrobněji Houška a Brožová (2002) nebo kapitola 4.1.2 v této práci.

po částech lineární funkcí jako s modelem lineárním. Jeho použití je však specifické jen pro určité typy úloh, do značné míry má heuristickou podstatu a pro rozsáhlejší úlohy se tento postup nejeví jako účinný.

3.8 Využití modelů po částech lineárního programování v praxi

Modely po částech lineárního programování nacházejí uplatnění při řešení praktických situací v mnoha odvětvích. Zejména se lze s jejich využitím setkat v zemědělství a při řešení ekonomických problémů. Tyto modely mají široké využití zejména proto, že aproximace nelineární funkce funkcí po částech lineární značně zjednodušuje následné řešení jakéhokoliv problému. Tato linearizace nemusí být nutně škodlivá, pokud lze u daného problému připustit určitou míru relaxace původních dat, aniž by to mělo zásadní vliv na výsledky následujícího řešení tohoto modelu. Existují různé přístupy k aproximaci nelineární funkce funkcí po částech lineární. Houška (2005) navrhuje přístup k aproximaci s využitím metody nejmenší čtverců. Relativně moderním přístupem je využití tzv. *splajnu*¹⁶. Tuto problematiku popisuje Judd (1998), který uvádí, že nejčastějším případem je v praxi kubický splajn. Polynomiální splajn může být ve svém jednodušším případě lineární interpolující splajn. Ten je pak možné využít pro aproximaci nelineární křivky na zadaných intervalech a dále úlohu řešit jako po částech lineární. V této kapitole jsou popsány některé aplikace z poslední doby zabývající se řešením praktických problémů za pomoci modelů po částech lineárního programování.

3.8.1 Aplikace v zemědělství

Viaggi, Bartolini a Raggi (2009) využívají modelu po částech lineárního programování v případové studii environmentální regulace v zemědělství. Článek popisuje metodologii řešící spojení modelu po částech lineárního programování a modelu primárních činitelů za účelem tvorby environmentální regulace v zemědělství. Po částech lineární programování zde figuruje především jako nástroj k odhadnutí funkce nákladů/užitku primárních činitelů pro model primárních činitelů. Jsou uvažovány dvě varianty metodologie. V prvním případě je funkce užitku činitelů odhadnuta pomocí interpolace výsledků parametrizace modelu po částech lineárního programování.

¹⁶ Originálně *spline* – jedná se o funkci, která je po částech polynomiální a na hranicích navazujících intervalů pokud možno spojitá a diferencovatelná.

V druhém způsobu jsou generovány a identifikovány významné krajní body nespojitě funkce užitku, a to za pomoci parametrizace modelu po částech lineárního programování. Tyto body jsou následně vkládány do diskrétního modelu primárních činitelů. Dále je popsána konkrétní případová studie řešící nákup environmentálních služeb v zemědělství. Výsledky ukazují, že je vhodné využít modelů po částech lineárního programování pro odhad parametrů funkcí nákladů/užitku, které jsou následně vkládány do modelu primárních činitelů. Tento přístup taktéž dovoluje začleňovat do modelů více informací z pohledu toho, jak se provádí rozhodování, obzvláště tehdy, pokud jsou podkladové údaje pro činitele získávány z několika různých typů činností. Výběr specifického postupu by však měl být pečlivě zvažován, aby správně vyhovoval vlastnostem příslušného modelu, zejména z pohledu podkladových údajů. Zvláštní pozornost je také třeba věnovat tomu, jakým způsobem omezení a technické koeficienty ovlivňují následný model.

Nieminen (2008) zkoumá pomocí po částech lineárního modelu půdního mikrosvětla propojení potravinových řetězců a procesů v ekosystémech. Ve své práci prezentuje model propojení dekompozitorů biomasy a dusíkatého cyklu v půdním prostředí. Dynamika potravního řetězce (neživá organická hmota – houby, hlísti) byla studována jako uzavřený systém a tento experiment byl modelován za účelem vyhodnocení role hlístů žijících se houbami v obohacování půdy dusíkem. Dynamika výskytu hlístů přešla od exponenciálního růstu do fáze jejich poměrně limitovaného výskytu. V té samé době došlo ke zvýšení obsahu amoniaku v půdě. Obě tyto dynamiky byly popsány dvoufázovou soustavou lineárních rovnic a řešeny modelem po částech lineárního programování. Tyto dva modely byly následně srovnány. Ukázalo se, že model, v němž byl zvýšený výskyt amoniaku v půdě zcela přisuzován hlístům, nedokázal předpovídat dynamiku vývoje hlístů. Naproti tomu model, ve kterém není mineralizace půdy hlístům přisuzována, dokázal zcela vystihnout dynamiku dusíku i hlístů v systému.

Karterakis a kol. (2007) využívá modelu po částech lineárního programování při řešení problematiky podpovrchové vody. V této studii byla zkoumána problematika hospodaření s povrchovou vodou v krasových *aquiferách* (tj. česky zvoděň – termín hydrogeologie) na pobřeží v Řecku, a to za pomoci po částech lineárního programování a heuristických optimalizačních metod. Nejprve byl vytvořen numerický simulační model, který by reprezentoval komplexní nelineární systém tohoto povrchového vodního útvaru. Dále byl využit klasický simplexový algoritmus pro řešení problémů

hospodaření s povrchovou vodou, kde hlavním cílem je hydraulická kontrola pronikání slané vody do této nádrže. Původně nelineární problém byl po částech linearizován. Toho bylo dosaženo opakovanou implementací simplexového algoritmu, čímž bylo dosaženo konvergence k optimálnímu řešení. Řešení tohoto nelineárního problému bylo taktéž dosaženo použitím heuristických metod. Poté je zde představeno porovnání výsledků obou rozdílných optimalizačních metod. Nakonec byla provedena analýza citlivosti, která zkoumala vliv odčerpávání vody z nádrží na vývoj pronikání slané vody do nádrže pobřežím.

Xie a kol. (2011) zkoumal charakteristiky šíření kontaminačních látek v částečně jílovitých půdách s po částech lineární adsorpcí. Adsorpce kontaminačních látek v půdě má běžně nelineární charakter, pokud je koncentrace kontaminačních látek dostatečně vysoká. Izoterma (tj. křivka) vyjadřující zjednodušenou po částech lineární adsorpci je konzistentní s výsledky pokusů a je navržena jako aproximace nelineární adsorpce. Tato aproximace umožňuje použití analytického řešení pro modelování rozptylu kontaminačních látek v půdě nelineárním způsobem. Jsou zde zavedeny pohyblivé omezující podmínky, které dokážou reprezentovat změny v koncentraci rozpuštěných látek i propustnosti půdy. Řešení pomocí modelu po částech lineárního programování bylo srovnáno a ověřeno empirickými daty. Navržené řešení je relativně jednoduché, co se týče využitelnosti, a může být využito při ověřování komplexnějších nelineárních modelů.

Využití po částech lineárních modelů v zemědělství pochopitelně není pouze záležitostí současnosti. Cale (1979) již v roce 1979 publikoval případovou studii zabývající se modelováním produktivity luk a pastvin s využitím po částech lineárního modelu. V případové studii je představena metodologie charakteristiky komplexních ekologických procesů v primární produkci. Výsledný model využívá při výpočtu reálné produkce teorie omezení založené na omezujících podmínkách tvořených danou vlhkostí, teplotou, dopadajícím zářením a obsahem živin v půdě. Procesy jako odpařování nebo vzlínání vody jsou zde klíčové pro tvorbu proměnných modelu. Byl zkonstruován simulační model, jehož výsledné hodnoty jsou v závěru uvedeny a srovnány se skutečnými naměřenými hodnotami.

3.8.2 Ekonomické aplikace

V ekonomických oborech se lze s modely po částech lineárními často setkat v souvislosti s metodou datových obalů (DEA). Ramos-Real a kol. (2009) odhadují

změny v brazilské energetické distribuční síti s využitím metody DEA a modelu po částech lineárního programování na vzorku 18 firem. V případové studii je provedena dekompozice změn v produktivitě těchto distribučních firem ve smyslu technické efektivity a technického pokroku. Tato případová studie napomáhá porozumět hlavním činitelům vývoje produktivity a zaměřuje se obzvlášť na její souvislost s restrukturalizací odvětví v roce 1990. Bylo zjištěno, že za rozvojem produktivity stojí především technologický pokrok a bylo rovněž dokázáno, že investiční pobídky státu nevedly tyto firmy ke změně chování produktivity a změně jejich efektivity.

Kombinaci metody DEA a modelu po částech lineárního programování využívá také Giannakis, Jamasb a Pollitt (2005) v případové studii týkající se srovnání kvality služeb v distribuci elektrické energie ve Velké Británii. Kvalita služeb se ukázala být významným tématem v poreformní regulaci distribuce elektrické energie v distribučních sítích. Regulační úřad vytvořil systém pobídkových schémat vedoucích k většímu šetření nákladů, investiční efektivity a zlepšení kvality služeb. Tato případová studie představuje kvalitativní srovnání nástrojů pro distribuci elektrické energie. Byla počítána technická efektivity těchto nástrojů pomocí metody datových obalů. Tato metoda byla aplikována v neparametrické formě při využití po částech lineárního programování k výpočtu (nikoliv odhadu) efektivity neboli efektivity limitních hranic při dané množině rozhodovacích jednotek (decision-making units), kterými zde byly jednotlivé firmy. Bylo zjištěno, že nákladová efektivity firem nutně nemusí vyjadřovat kvalitu služeb a že nákladově orientované modely vykazují jiné výsledky než ty ryze kvalitativně ohodnocené a neexistuje mezi nimi vysoká korelace. Výsledky také poukazují na to, že zlepšení kvality služeb významně přispívá ke změně produktivity v tomto sektoru. Na závěr je popsáno, že kvalitativní přístup by bylo vhodné spíše preferovat před ryze nákladovými modely, protože lépe odpovídají realitě. Dalším případem využití metody DEA společně s po částech lineárním modelem se ve své práci zabývá Avkiran (2001). V této případové studii hodnotí technickou efektivity australských univerzit. Ukazatele výkonnosti ve veřejném sektoru jsou často kritizovány jako nedostatečně výstižné pro hodnocení efektivity. Cílem této studie bylo za využití modelu po částech lineárního programování zjistit relativní efektivity australských univerzit. Byly vytvořeny tři modely výkonnosti – Model celkové výkonnosti, Model výkonnosti poskytování vzdělávacích služeb a Model finanční efektivity. Zjištění založená na datech z roku 1995 ukázala, že univerzity pracují

efektivně po technické stránce, ale lze najít zlepšení po finanční stránce. Použití modelu po částech lineárního programování umožňuje identifikovat sady doporučení pro neefektivní instituce a přinést objektivní návrh na zlepšení produktivity. Proto může být vhodným srovnávacím nástrojem pro ministerstvo školství a být nápomocno při alokaci zdrojů a finančních prostředků pro univerzity. Protože neexistuje přesný ekonomický ukazatel rentability nabytého vzdělání, musí se univerzity ohlížet po alternativních způsobech hodnocení, jako je právě tento.

Modely po částech lineárního programování lze v ekonomické praxi využívat i samostatně. Chu (2011) ve své práci využívá po částech lineárního modelování k predikci turistického ruchu v Macau. Jsou zde využívána data z let 1991-2005 a upravená časová řada poptávky turistů přijíždějících do Macaa. MAPE a chí-kvadrát jsou zde brány jako kritéria pro hodnocení přesnosti předpovědí. Dále je srovnán po částech lineární model s autoregresivní trendovou funkcí a sezónním autoregresivním klouzavým průměrem. V konečném srovnání přesnosti všech tří modelů vychází model po částech lineární jako nejpřesnější.

Bayindir, Birbil a Frenk (2007) ve své práci popisují deterministický produkčně spotřební model řízení zásob s obecnou křivkou nákladů a po částech lineární konkávní funkcí nákladů produkce. V této případové studii je podrobně představen produkčně spotřební model zásob s přípustným přechodným nedostatkem zásob za předpokladu obecné nákladové křivky zásob a po částech lineární konkávní funkcí nákladů produkce. V návaznosti na to je navržen efektivní postup řešení, částečně použitý v aproximačním schématu. Dále je uvedena případová studie, na které je ukázána efektivnost navrženého řešení v praxi.

3.8.3 Ostatní aplikace

Podstata modelu po částech lineárního programování zejména spočívá v aproximaci nelineární funkce funkcí po částech lineární. Je proto možné nalézt uplatnění pro tyto modely nejen v zemědělství a ekonomice, ale všude tam, kde je třeba využívat složitých nelineárních modelů.

Elimam a kol. (1988) se zabývají optimalizací v solární termální elektrárně z hlediska energetických toků a alokace zdrojů vody. Tento solární termální energetický systém je vytvořen pro decentralizované dodávky energie pro malé izolované komunity. Proměnlivost intenzity slunečního záření vede k nutnosti zjišťování dostupných operativních možností a odpovídající alokaci energie a vody pro koncové uživatele.

V tomto článku je představen model matematického programování pro řízení elektrárny. Přístup po částech lineárního programování je zde přizpůsoben tak, aby přesně vystihoval proměnné efektivnosti turbín v závislosti na úrovni vstupu. Optimalizace účelové funkce sestává z lineární kombinace dvou cílů: Maximalizace světelného lomu a uspokojení poptávky uživatelů. Oběma kritériím jsou přiřazeny odpovídající váhy, které vystihují důležitost těchto kritérií. Tento model se zaměřuje na integraci energetických a vodních složek systému a poskytuje každodenní operativní možnosti při neustálých změnách intenzity slunečního záření a změnách poptávky.

Zhang, Huang a He (2011) popisují logistický model komunálního odpadového hospodářství. Autoři předpokládají, že všechny parametry modelu jsou intervaly kvantifikující nejistoty v optimalizačním procesu a řešení tohoto logistického modelu. Pro řešení tohoto modelu bylo využito po částech lineárního programování, aby bylo možné se vypořádat s minimalizačním charakterem omezujících podmínek i účelové funkce. Využití modelu je názorně ilustrováno na typickém modelu zpracování komunálního odpadu. Byly analyzovány dva scénáře s proměnlivými nákladovými parametry pro skládky a spalovny. Tento model je schopen reflektovat dynamiku a nejistotu v systémech odpadového hospodářství a mohl by usnadnit vytváření plánů odpadového hospodářství. Tento model je navíc možno dále rozšířit o stochastické a fuzzy veličiny.

De Best a kol. (2008) navrhuje využití modelů po částech lineárního programování pro řízení pohybu papíru po tiskařské lince. Tento problém je rozdělen na řízení chodu motorů a kontroly jednotlivých tiskovin, přičemž tyto procesy je třeba efektivně synchronizovat. Na základě modelu po částech lineárního programování dynamiky pohybu papíru po lince byl navržen nový design řízení. Jak odhalila zpětnovazebná čidla linky, výsledný model dynamiky tohoto systému je velmi stabilní. Model řízení linky byl rovněž implementován a verifikován na experimentální tiskové lince.

Mizuno a Abe (1995) vytvořili algoritmus pro po částech lineární konverzi hlasu. Článek představuje nový algoritmus pro převod hlasu určitého řečníka tak, aby zněl jako hlas někoho jiného. Tento algoritmus pružně převádí kvalitní zvuk za pomoci dvou hlavních technik. K odhadu parametrů převodu je využito modelu po částech lineárního programování, který znázorňuje frekvence formantů (tj. lokální extrém zvuku ve spektru zvuků) a intenzitu zvukového spektra. Tyto parametry lze takto odhadnout poměrně detailně. Pravidla převodu fungují automaticky pro jakoukoliv dvojici hlasů.

Spolehlivost je statisticky zaručena na základě použití trénovací množiny dat. Řeč je v algoritmu iterativně měněna, aby bylo dosaženo požadovaného úrovně formantu. Poslechové testy dokazují, že navržený algoritmus respektuje rozmanitost hlasů jednotlivých řečníků při zachování dobré kvality výstupu.

V neposlední řadě se lze setkat s modely po částech lineárního programování u velmi známých matematických problémů, jako je např. problém batohu. Kameshwaran a Narahari (2009) uvažují zmenšenou verzi problému třídy nekonvexních problémů batohu s po částech lineární strukturou omezení. Položky, které mají být do batohu zahrnuty, mají dělitelné počet i ohodnocení. Libovolná položka může být zahrnuta v daném intervalu množství a její cena je nekonvexní po částech lineární funkcí množství. Při známé poptávce je optimalizačním problémem vybrat optimální množství jednotlivých položek tak, aby poptávka byla uspokojena a náklady minimalizovány. S tímto problémem nebo jeho příbuznými variantami se setkáváme u plánování, návrhu zásobovacích řetězců, zadávání veřejných zakázek a jiných současných aplikací. Čtyři rozdílné smíšené modely po částech lineárního programování jsou navrženy a srovnány s existujícími algoritmy. Rozsáhlé výpočetní experimenty dokazují, že navržené algoritmy jsou efektivnější a tedy rychlejší než ty dosavad používané.

4 Návrh řešení úlohy s nekonvexní po částech lineární účelovou funkcí

V této kapitole budou popsány úlohy po částech lineárního programování s nekonvexní účelovou funkcí a jejich členění dle stanovených parametrů. Analytický popis těchto úloh bude doplněn o jejich grafickou reprezentaci. Dále bude popsána transformace obecné úlohy na novou úlohu matematického programování. Největší díl této kapitoly představuje popis algoritmu pro nalezení optimálního řešení nekonvexní úlohy po částech lineárního programování a současná ilustrace tohoto postupu na konkrétních příkladech. S využitím zvolené metodiky bude dokázáno, že nalezené řešení je z množiny všech přípustných kandidátů na optimální řešení právě optimálním řešením.

4.1 Obecný model po částech lineárního programování

Na počátku budeme uvažovat obecný model po částech lineárního programování (4-1-1). Tento model budeme dále označovat PWLP (PieceWise Linear Programming) a je definován následujícím způsobem:

Maximalizujte $Z(x) = Z_1(x_1) + Z_2(x_2) + \dots + Z_n(x_n)$
za podmínek

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i, i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$$

$$x_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n \tag{4-1-1}$$

kde

$$Z_j(x_j) = \begin{cases} Z_{j1}(x_j), x_j \in \langle 0, k_{j1} \rangle \\ Z_{j2}(x_j), x_j \in \langle k_{j1}, k_{j2} \rangle \\ \vdots \\ Z_{jp_j}(x_j) \in \langle k_{jp_j-1}, \infty \rangle, j = 1, 2, \dots, n \end{cases}$$

Jedná se o maximalizační model matematického programování s po částech lineární účelovou funkcí a lineárními omezujícími podmínkami. Omezení úlohy jsou zde formálně definována jako typ „menší nebo rovno“. Ve skutečnosti se však může jednat o podmínku jakéhokoliv typu: \leq , \geq nebo $=$. Stejně tak účelová funkce může být ve skutečnosti i minimalizační. Směr optimalizace ovlivňuje především samotný algoritmus výpočtu.

4.1.1 Po částech lineární účelová funkce

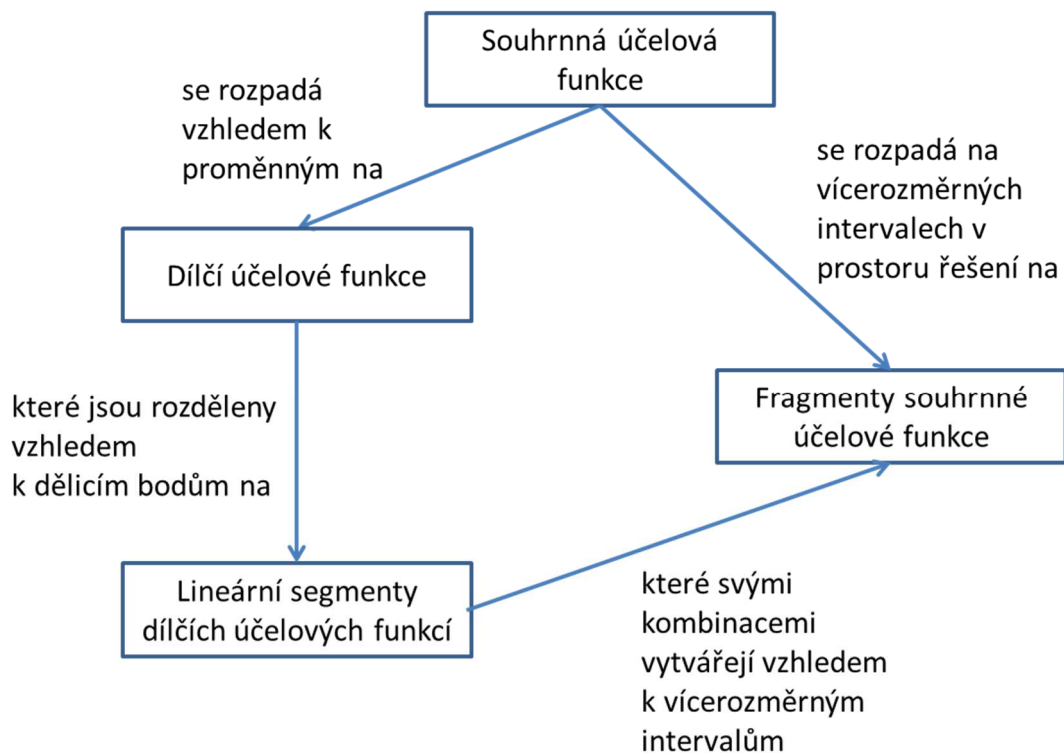
Obecná po částech lineární funkce $Z(x)$ je složena z n dílčích po částech lineárních účelových funkcí.

V této práci budeme rozlišovat celkem 4 úrovně pohledů na účelovou funkci.

Dle modelu (4-1-1) nazveme:

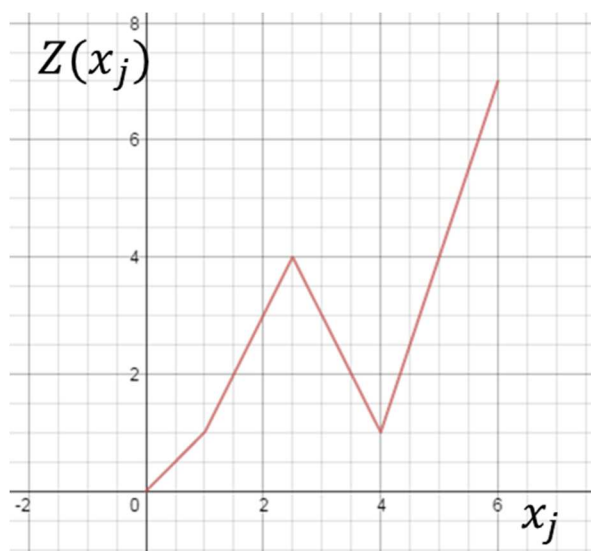
- $Z(x)$...**Souhrnná účelová funkce**. Jedná se o separabilní účelovou funkci, jejíž hodnota vyjadřuje reálnou hodnotu účelové funkce zadané úlohy.
- $Z_1(x_1), Z_2(x_2), \dots, Z_n(x_n)$...**Dílčí po částech lineární účelová funkce**. Jedná se o účelové funkce jedné proměnné, jejichž součtem dostaneme hodnotu **souhrnné účelové funkce**. Jednotlivé hodnoty dílčích funkcí nemají samostatně velký význam a slouží pouze pro určení hodnoty účelové funkce souhrnné. V následujícím textu tyto funkce budou také zkráceně nazývány **dílčí účelová funkce** nebo **dílčí po částech lineární funkce**. Jednoznačným identifikátorem těchto funkcí je slovo „dílčí“.
- $Z_{11}(x_1), Z_{12}(x_1), \dots, Z_{jp_j}(x_j)$...**Lineární segmenty dílčích účelových funkcí**. Jedná se o jednotlivé úseky **dílčích účelových funkcí** na zadaných intervalech z $\langle 0; k_{jk} \rangle \cup \langle k_{jp_j-1}; \infty \rangle$. V následujícím textu budou také zkráceně nazývány **lineární segmenty**.
- Z_{h_1, h_2, \dots, h_n} ...**Fragmenty účelové funkce**. S využitím již uvedených pohledů na účelovou funkci lze definovat ještě čtvrtou úroveň, a tou je vyjádření **souhrnné účelové funkce** pomocí fragmentů souhrnné účelové funkce odpovídajících jednotlivým vícerozměrným intervalům, které vzniknou vzájemným kombinováním různých úseků dílčích po částech lineárních funkcí (viz dále, kapitola 4.2.2).

Vztahy mezi těmito úrovněmi lze vyjádřit následujícím schématem:



Obrázek 4.1: Různé pohledy na účelovou funkci.

Na obrázku 4.2 je příklad obecné dílní po částech lineární funkce se čtyřmi lineárními segmenty.



Obrázek 4.2: Obecná po částech lineární funkce jedné proměnné, (vytvořeno v DGC).

Tato funkce má některé podstatné vlastnosti, a to, že je **nekonvexní**, **spojitá** a „**nehladká**“. To má význam především pro potřeby této práce, neboť právě tyto vlastnosti budou všechny funkce zde popisované splňovat. Jinak řečeno, v úlohách zde řešených budou lineární segmenty dílních funkcí vždy plynule napojeny v bodech, kde

funkce nemá spojité derivace, a v těchto bodech budou nastávat zlomy, které mohou být nekonvexní.

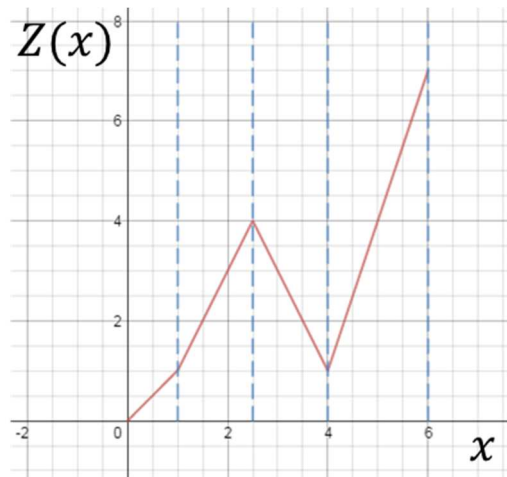
Pojem konvexnosti optimalizační úlohy je třeba chápat v souvislosti se směrem optimalizace zvolené úlohy. Označme k_j^* směrnice všech n lineárních segmentů dílčí po částech lineární funkce. Pokud je posloupnost směrnic $(k_j^*)_{j=1}^n$ nerostoucí pro maximalizační úlohu nebo neklesající pro minimalizační úlohu, potom tuto úlohu (účelovou funkci) považujeme za konvexní. Pokud tento předpoklad neplatí, úloha (účelová funkce) je nekonvexní. Body, ve kterých je nerostoucí (neklesající) posloupnost „narušena“ nazveme *nekonvexní zlomy* po částech lineární funkce. Na obrázku 4.2 se jedná o hodnoty $x = 2,5$ (v případě, že by se jednalo o minimalizační úlohu) nebo hodnoty $x = 1$ a $x = 4$ (v případě, že by se jednalo o maximalizační úlohu).

Dále také budeme uvažovat pouze funkce ohraničené určitým reálným intervalem, tedy ne takové, jejichž definiční obor je z pravé či z levé strany neomezen.

4.1.2 Zavedení dělicích bodů do modelu

V návaznosti na práci Houšky a Brožové (2002) budou do modelu po částech lineárního programování zavedeny dělicí body. Každá dílčí po částech lineární účelová funkce má alespoň dva lineární segmenty. Na hranici těchto segmentů budou vždy existovat určité dělicí body, kde jeden segment končí a další začíná. Speciálně pak každá dílčí po částech lineární funkce bude mít dva dělicí body, které nazveme hraniční body. Tyto body budou totožné s hraničními body definičního oboru funkce. Na obrázku 4.3 je opět zobrazen obecný graf dílčí po částech lineární funkce, tentokrát včetně přerušovaných čar, které oddělují jednotlivé lineární segmenty. Pojem *dělicí bod*¹⁷ budeme v práci používat i nadále a bude se jednat o bod, v němž se směrnice dílčí po částech lineární funkce mění, respektive v němž nemá dílčí po částech lineární funkce spojitou derivaci.

¹⁷ V anglické literatuře se tentýž bod nazývá *knot*. V této práci přejímáme pojem *dělicí bod* dle autorů Houšky a Brožové (2002). V české literatuře se lze ovšem setkat i s doslovným překladem originálního pojmu, tj. *uzel*.



Obrázek 4.3: Obecná po částech lineární funkce s dělicími body, (vytvořeno v DGC).

Funkce má 3 dělicí body (v $x = 1, x = 2,5, x = 4$) a 2 hraniční body (v $x = 0$ a $x = 6$). Tyto dělicí body přímo odpovídají parametrům k_{jp_j} z obecného modelu (4-1-1). Je zřejmé, že v každém intervalu daném sousedními dělicími body je růst (pokles) lineárního segmentu funkce vzhledem k optimálnímu řešení jiný alespoň v jednom případě. V některých intervalech ovšem mohou mít segmenty funkce stejnou směrnici. Je logické, že pokud dva sousedící segmenty po částech lineární funkce $\langle k_{j_m}, k_{j_{(m+1)}} \rangle$ a $\langle k_{j_{(m+1)}}, k_{j_{(m+2)}} \rangle$ mají stejnou směrnici, potom také segment této funkce $\langle k_{j_m}, k_{j_{(m+2)}} \rangle$ má směrnici totožnou s oběma segmenty a je možné oba tyto segmenty sloučit v jediný. Proto je opodstatněné, aby v modelu odpovídaly intervaly hodnot proměnné segmentům po částech lineární funkce se stejnou směrnici pouze v takovém případě, pokud nejsou navzájem sousední.

Dělicí body tedy vymezují oblasti hodnot proměnných odpovídajících jednotlivým segmentům po částech lineární funkce. Každou takovou oblast lze zapsat jako kartézský součin jednotlivých intervalů hodnot proměnných daných sousedními dělicími body. Tyto oblasti tedy představují vícerozměrný interval.

Dělicí body hrají významnou roli v procesu optimalizace, protože při hledání optimálního řešení určité úlohy nelze pracovat se souhrnnou po částech lineární účelovou funkcí jako s celkem, ale je nutné uvažovat a do modelu zahrnout dvě základní hlediska. Těmi jsou jednak zmíněné dělicí body a dále také směrnice jednotlivých lineárních segmentů dílčí po částech lineární funkce. Je zřejmé, že na rozdíl od obyčejného modelu lineárního programování zde nebude mít souhrnná účelová funkce v každém vícerozměrném intervalu prostoru řešení vždy stejný růst. Pro určité hodnoty neznámé x_j se míra růstu (směrnice lineární funkce) bude měnit.

Příkladem budiž obrázek 4.2 pro jednu proměnnou. Pro hodnoty $x \in \langle 0; 1 \rangle$ je $Z(x) = x$, pro hodnoty $x \in \langle 1; 2,5 \rangle$ je $Z(x) = 2x - 1$, pro hodnoty $x \in \langle 2,5; 4 \rangle$ je $Z(x) = -2x + 9$ a pro hodnoty $x \in \langle 4; 6 \rangle$ je $Z(x) = 3x - 11$. Absolutní členy v účelových funkcích vyjadřují posunutí těchto funkcí, na nalezení optimálního řešení ovšem posun funkce nemá vliv. Směr optimalizace určuje pouze směrnice účelové funkce a absolutní člen pouze ve finále určuje skutečnou hodnotu účelové funkce v určitém bodě. Tento přístup můžeme realizovat i v případě funkce více proměnných.

Při hledání optimálního řešení je nutné zohledňovat skutečnost, že se směrnice dílčí účelové funkce Z_j mění v závislosti na hodnotě proměnné x_j . Můžeme tedy využít dělicích bodů k tomu, abychom prostor řešení rozdělili na více vícerozměrných intervalů v množině přípustných řešení. Máme-li pro každou dílčí lineární funkci p dělicích bodů, potom rozdělíme prostor řešení pro každou dílčí funkci na $p - 1$ částí. Z hlediska procesu hledání optimálního řešení nás především bude zajímat situace přechodu z jednoho segmentu do jiného.

Do modelu matematického programování je tedy nutné zavést instrument pro sledování polohy stávajícího bazického řešení vzhledem k dělicím bodům. Využijeme přístupu Houšky a Brožové (2002), který originálně čerpá z principů cílového programování a do modelu PWLP (4-1-1) zavedeme nové proměnné, které nazveme *rozdílové proměnné*. Označme tuto proměnnou $r_{jk}^{+/-}$, kde j je index příslušné dílčí účelové funkce, k je index příslušného dělicího bodu a horní index $+(-)$ vyjadřuje překročení (nedosažení) určitého dělicího bodu. Ve skutečnosti se jedná o vzdálenost stávajícího bazického řešení od hodnot dělicích bodů v prostoru řešení. V případě funkce jedné proměnné z obrázku 4.3 můžeme tuto vzdálenost chápat jako vzdálenost zleva a vzdálenost zprava.

Vyjádření vzdálenosti od určitého dělicího bodu lze zapsat obecně následujícím způsobem. Označme x_j^* některou skutečnou hodnotu proměnné x_j a uvažujme k -tý dělicí bod j -té dílčí po částech lineární funkce k_{jk} . Potom může nastat právě jedna z následujících situací:

-
- Pokud $x_j^* = k_{jk}$, potom $r_{jk}^+ = 0$ a $r_{jk}^- = 0$.
 - Pokud $x_j^* < k_{jk}$, potom $r_{jk}^+ = 0$ a $r_{jk}^- = k_{jk} - x_j^*$. (4-1-2)
 - Pokud $x_j^* > k_{jk}$, potom $r_{jk}^- = 0$ a $r_{jk}^+ = x_j^* - k_{jk}$.

Výše uvedené vztahy musí vždy platit, a proto zavedeme do obecného modelu LP novou podmínku:

$$x_j + r_{jk}^- - r_{jk}^+ = k_{jk} \quad (4-1-3)$$

Nazvěme tuto podmínku *podmínkou rozdílových bodů*. Tato podmínka nezabezpečuje funkčnost vztahů (4-1-2) beze zbytku. Například v konkrétní podmínce

$$2 + r_{jk}^- - r_{jk}^+ = 10 \quad (4-1-4)$$

bychom očekávali, že $r_{jk}^- = 8$ a $r_{jk}^+ = 0$. Stejně tak by však mohlo platit, že např. $r_{jk}^- = 12$ a $r_{jk}^+ = 4$, což by už ale nevyjadřovalo vzdálenost od dělicího bodu. Proto je ke vztahu (4-1-4) zároveň vyžadována doplňující podmínka komplementarity

$$r_{jk}^- \cdot r_{jk}^+ = 0 \quad (4-1-5)$$

kteřá zajistí, že alespoň jedna z rozdílových proměnných bude nabývat hodnoty 0. Jedná se o podmínku nelineární, která by mohla ze své podstaty znemožnit použití simplexového algoritmu, případně vícekriteriálního simplexového algoritmu. Tato podmínka v podstatě určuje, že jedna z dvojice proměnných r_{jk}^-, r_{jk}^+ musí být vždy nebazická, a tedy nabývat hodnotu 0. Pokud tedy neuvažujeme existenci takového degenerovaného řešení, kde obě proměnné r_{jk}^-, r_{jk}^+ jsou bazické a alespoň jedna z nich nabývá hodnoty 0.

Uvedená nelineární podmínka je i součástí *Karush-Kuhn Tuckerovy podmínky* (3-3-11) nebo ve své modifikaci i součástí *lineárního komplementárního problému* (3-6-1). Tuto podmínku je možno zajistit kontrolou proměnných vstupujících do nové báze. V případě uvažovaného modelu po částech lineárního programování není nutné vstupní proměnné sledovat, neboť zde situace, kdy by se obě proměnné r_{jk}^-, r_{jk}^+ dostaly do báze zároveň, nemůže nastat. Uvědomíme-li si, že díky podmínce dělicího bodu (4-1-3) bude v simplexovém algoritmu mít proměnná r_{jk}^- koeficient 1, potom proměnná r_{jk}^+ bude mít jistě koeficient -1. Ostatní koeficienty v daném sloupci budou vždy nulové, neboť proměnné r_{jk}^-, r_{jk}^+ se vyskytují vždy unikátně pouze v podmínce pro k -tý dělicí bod. Vektory koeficientů těchto proměnných jsou opačné, jeden je -1 násobkem druhého.

Pokud jedna z těchto proměnných bude součástí kanonické báze, potom druhá proměnná s opačným vektorem koeficientů kanonickou bází zároveň vytvářet nemůže. Zařazením podmínek dělicích bodů (4-1-3) vznikne z modelu PWLP nový, transformovaný model po částech lineárního programování, který budeme nadále označovat jako PWLP-B (PieceWise Linear Programming – Boundary points). Tento model je definován následujícím způsobem:

Maximalizujte $Z(x) = Z_1(x_1) + Z_2(x_2) + \dots + Z_n(x_n)$
za podmínek

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i, i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$$

$$x_j + r_{jk}^- - r_{jk}^+ = k_{jk}, j = 1, 2, \dots, n; k = 1, 2, \dots, p_j$$

$$r_{jk}^- \cdot r_{jk}^+ = 0, j = 1, 2, \dots, n; k = 1, 2, \dots, p_j \quad (4-1-6)$$

$$x_j, r_{jk}^-, r_{jk}^+ \geq 0$$

kde

$$Z_j(x_j) = \begin{cases} Z_{j1}(x_j), x_j \in \langle 0, k_{j1} \rangle \\ Z_{j2}(x_j), x_j \in \langle k_{j1}, k_{j2} \rangle \\ \vdots \\ Z_{jp_j}(x_j) \in \langle k_{jp_j-1}, \infty \rangle, j = 1, 2, \dots, n \end{cases}$$

Uvedený model zahrnuje původní sadu omezení, podmínky nezápornosti pro všechny přítomné proměnné v modelu a nově podmínky rozdílových bodů. Cenový koeficient každé z proměnných v souhrnné účelové funkci je vyjádřen pomocí dílčích lineárních funkcí s různými směrnici na daných intervalech. Podmínky dělicích bodů neomezuji či nemění množinu přípustných řešení. Přidání rozdílových proměnných však pomůže v budoucích výpočtech identifikovat, kde se při procházení prostoru přípustných řešení právě nacházíme, a jaká je skutečná hodnota souhrnné účelové funkce stávajícího řešení.

4.2 Prostor přípustných řešení

Prostor přípustných řešení zkoumané úlohy po částech lineárního programování má určité specifické vlastnosti, a to zejména z důvodu přítomnosti dílčích účelových funkcí. V následujícím textu je popsáno, jak je tuto skutečnost možné využít ve prospěch algoritmického řešení úlohy.

4.2.1 Omezení prostoru přípustných řešení

Uvažujme prostor přípustných řešení úlohy daný

$$\begin{aligned} \mathbf{Ax} &\leq \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\geq \mathbf{0} \end{aligned} \tag{4-2-1}$$

Pro realizaci veškerých výpočtů ve vlastní části práce budeme uvažovat pouze oblast tohoto prostoru přípustných řešení. Některé metody, například gradientní, totiž umožňují ocitnout se v určité fázi výpočtu mimo prostor přípustných řešení. Dílčí účelové funkce jsou, jak bylo ukázáno v obecném modelu (4-1-6) definovány na určitých intervalech v rozmezí $\langle 0; \infty \rangle$. Pokud je však prostor přípustných řešení omezen shora (u maximalizační úlohy) více omezujícími podmínkami, potom je postačující dílčí účelovou funkci definovat na $\langle 0; K_j \rangle$, kde

$$K_j = \operatorname{argmax}_{x_j} \left(\sum_{j=1}^n \mathbf{a}_j x_j \leq \mathbf{b} \right) \tag{4-2-2}$$

Tedy pokud je prostor přípustných řešení omezen shora nějakou hraniční hodnotou pro proměnnou x_j , potom i hraniční hodnota hraničního intervalu pro Z_j je touto hodnotou určena.

Například pokud je známo ze všech omezení modelu $x_1 \leq 6$ a zároveň hraniční hodnoty dílčí účelové funkce $Z_1 \in \langle 0; 8 \rangle$, potom je vhodné omezit pravou stranu intervalu na $Z_1 \in \langle 0; 6 \rangle$. Tento krok má své opodstatnění, protože se tím může (ale nemusí) snížit počet proměnných v modelu. Například pokud by u téhož příkladu existoval ještě i interval $Z_{1p_1} \in \langle 8; 12 \rangle$, potom by bylo možné tento interval zcela opomenout, neboť tyto hodnoty nevyhovují podmínce $x_1 \leq 6$. Tím by i odpadla nutnost přidávat některé proměnné $r_{jk}^{+/-}$ do modelu. Redukce modelu, byť jen o 2 proměnné, už může být z hlediska prostorové výpočetní složitosti významnou úsporou.

Odstranění některých rozdílových proměnných z levé strany nebudeme uvažovat. Samozřejmě je možné, že ve skutečnosti může být prostor přípustných řešení omezen i z levé strany tak, že nebude nutné uvažovat hodnoty dílčích účelových funkcí počínaje hodnotou 0. Protože však v postupu uvedeném později bude využito simplexového algoritmu pro řešení úlohy, není možné tyto hodnoty opomíjet. Výchozí bazické řešení simplexového algoritmu má vždy hodnoty všech rozhodovacích proměnných $x_j = 0$, jsou nebazické a bazické proměnné jsou proměnné doplňkové či pomocné. V dalších krocích simplexového algoritmu je teprve realizován přesun z počátku soustavy

souřadnic do výchozího přípustného řešení (pokud existuje), které navíc nemusí tvořit levou stranu tohoto intervalu. Hledání takové kanonické báze, která určuje levou stranu intervalů hodnot proměnných, by bylo opět zbytečně „výpočetně nákladné“.

4.2.2 Rozdělení prostoru přípustných řešení

Přítomnost dílčích účelových funkcí v modelu umožňuje prostor přípustných řešení virtuálně rozdělit na menší celky jako průniky množiny přípustných řešení s vícerozměrnými intervaly odpovídajícími dělicím bodům. Na každém celku lze definovat vlastní směr růstu účelových funkcí, který, jak bylo uvedeno v popisu problému, není na celém prostoru stále stejný. Zavedením virtuálního „rastru“ vícerozměrných intervalů do prostoru přípustných řešení získáme novou množinu bodů, kandidátů¹⁸ na optimální řešení. Tato množina bodů nevzniká bezdůvodně a uměle, ale z důvodů přidání rozdílových proměnných $r_{jk}^{+/-}$ do modelu.

Pokud budeme uvažovat řešení optimalizační úlohy pomocí nějakého iterativního algoritmu založeného na pivotizačním přístupu, potom přidáním těchto proměnných také vzroste počet všech možných kanonických bází, které je možno nalézt. Původní model po částech lineárního programování může mít při m omezeních a n proměnných (včetně doplňkových) nejvýše $\binom{n}{m}$ kanonických bází¹⁹. Přidáním rozdílových proměnných pro celkem k dělicích bodů (souhrnně pro všechny dílčí účelové funkce) tento počet vzroste na $\binom{n+2k}{m+k}$. Tento nárůst, jak uvidíme dále, není zanedbatelný. Tento nárůst je však opodstatněný, protože dále umožní linearizaci problému, a tak i řešitelnost algoritmem, který je z hlediska výpočetní složitosti finitní.

Ukažme rozdělení prostoru přípustných řešení na názorném příkladu. Mějme obecnou po částech lineární funkci dvou proměnných $Z(\mathbf{x}) = Z_1(x_1) + Z_2(x_2)$. V tuto chvíli odhlédneme od směru optimalizace a budeme se věnovat způsobu jejího zobrazení

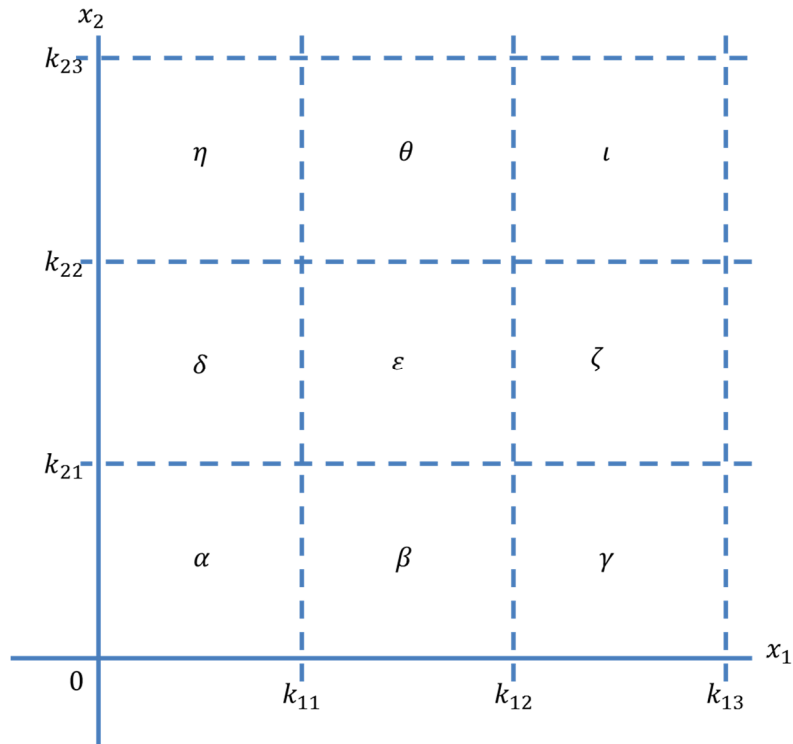
¹⁸ Pojem kandidát na optimální řešení vychází z anglického termínu *candidate solution* a je některým přípustným řešením úlohy. V intencích této práce považujeme za kandidáty na optimální řešení zejména ta řešení, která jsou k tomu předurčena svojí polohou na konvexním polyedru, tzn. jeho vrcholy a také další významné body, jejichž existence vychází z hranic odpovídajících dělicím bodům dílčích po částech lineárních funkcí v modelu.

¹⁹ Jedná se však pouze o kombinatorické vyjádření počtu bází. Ve skutečnosti všechny tyto báze vzniknout nemohou.

v prostoru přípustných řešení. Pro každou funkci definujeme 3 lineární segmenty Z_{j1}, Z_{j2}, Z_{j3} :

$$\begin{aligned}
 Z_1(x_1) &= Z_{11}(x_1), x_1 \in \langle 0; k_{11} \rangle \\
 Z_1(x_1) &= Z_{12}(x_1), x_1 \in \langle k_{11}; k_{12} \rangle \\
 Z_1(x_1) &= Z_{13}(x_1), x_1 \in \langle k_{12}; k_{13} \rangle \\
 & \hspace{15em} (4-2-3) \\
 Z_2(x_2) &= Z_{21}(x_2), x_2 \in \langle 0; k_{21} \rangle \\
 Z_2(x_2) &= Z_{22}(x_2), x_2 \in \langle k_{21}; k_{22} \rangle \\
 Z_2(x_2) &= Z_{23}(x_2), x_2 \in \langle k_{22}; k_{23} \rangle
 \end{aligned}$$

Tuto situaci potom můžeme znázornit ve dvoudimenzionálním prostoru. Následující obrázek 4.3 ukazuje rastr dvourozměrných intervalů vzniklý zavedením dělicích a hraničních bodů do prostoru řešení pro proměnné x_1, x_2 .



Obrázek 4.4: Ilustrace rozdělení prostoru pro $Z(x_1, x_2)$.

Každá z proměnných x_1, x_2 může nabývat hodnot ze tří různých intervalů. Z obrázku 4.3 je patrné, že existuje 3^2 dvourozměrných intervalů, v nichž je růst obou účelových funkcí unikátní. Obecně bude existovat p^j takových vícerozměrných intervalů pro p lineárních segmentů a j proměnných. Tedy za předpokladu, že každá z dílčích funkcí Z_1, Z_2, \dots, Z_j má stejný počet lineárních segmentů. Dodejme, že počet lineárních segmentů může být libovolný pro každou funkci Z_1, Z_2, \dots, Z_j . Aby se jednalo o model

po částech lineárního programování, musí mít nejméně jedna z funkcí Z_1, Z_2, \dots, Z_j alespoň 2 lineární segmenty. Dále také dodejme, že šířka intervalů $\langle k_{jk}; k_{j,k+1} \rangle$ nemusí být nutně konstantní, situace na obrázku 4.4 je pouze ilustrativní. Jednotlivé dvourozměrné intervaly v ilustrativním příkladu na obrázku 4.4 jsme označili postupně $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta, \eta, \theta, \iota$. Platí, že

$$\begin{aligned}
 \alpha &\equiv \langle 0; k_{11} \rangle \times \langle 0; k_{21} \rangle \\
 \beta &\equiv \langle k_{11}; k_{12} \rangle \times \langle 0; k_{21} \rangle \\
 \gamma &\equiv \langle k_{12}; k_{13} \rangle \times \langle 0; k_{21} \rangle \\
 \delta &\equiv \langle 0; k_{11} \rangle \times \langle k_{21}; k_{22} \rangle \\
 \varepsilon &\equiv \langle k_{11}; k_{12} \rangle \times \langle k_{21}; k_{22} \rangle \\
 \zeta &\equiv \langle k_{12}; k_{13} \rangle \times \langle k_{21}; k_{22} \rangle \\
 \eta &\equiv \langle 0; k_{11} \rangle \times \langle k_{22}; k_{23} \rangle \\
 \theta &\equiv \langle k_{11}; k_{12} \rangle \times \langle k_{22}; k_{23} \rangle \\
 \iota &\equiv \langle k_{12}; k_{13} \rangle \times \langle k_{22}; k_{23} \rangle
 \end{aligned} \tag{4-2-4}$$

Každému z těchto dvourozměrných intervalů odpovídá jeden fragment souhrnné účelové funkce a v každém z nich identifikujeme unikátní míru růstu $\mathbf{Z}(\mathbf{x})$:

$$\begin{aligned}
 Z_\alpha(\mathbf{x}) &= Z_{11}(x_1) + Z_{21}(x_2), \forall (x_1, x_2) \in \alpha \\
 Z_\beta(\mathbf{x}) &= Z_{12}(x_1) + Z_{21}(x_2), \forall (x_1, x_2) \in \beta \\
 Z_\gamma(\mathbf{x}) &= Z_{13}(x_1) + Z_{21}(x_2), \forall (x_1, x_2) \in \gamma \\
 Z_\delta(\mathbf{x}) &= Z_{11}(x_1) + Z_{22}(x_2), \forall (x_1, x_2) \in \delta \\
 Z_\varepsilon(\mathbf{x}) &= Z_{12}(x_1) + Z_{22}(x_2), \forall (x_1, x_2) \in \varepsilon \\
 Z_\zeta(\mathbf{x}) &= Z_{13}(x_1) + Z_{22}(x_2), \forall (x_1, x_2) \in \zeta \\
 Z_\eta(\mathbf{x}) &= Z_{11}(x_1) + Z_{23}(x_2), \forall (x_1, x_2) \in \eta \\
 Z_\theta(\mathbf{x}) &= Z_{12}(x_1) + Z_{23}(x_2), \forall (x_1, x_2) \in \theta \\
 Z_\iota(\mathbf{x}) &= Z_{13}(x_1) + Z_{23}(x_2), \forall (x_1, x_2) \in \iota
 \end{aligned} \tag{4-2-5}$$

Vztahy (4-2-5) udávají, že hodnota souhrnné účelové funkce v jednotlivých intervalech je rovna hodnotě příslušného fragmentu účelové funkce. Tato hodnota závisí na reálných hodnotách proměnných x_1, x_2, \dots, x_j a tato hodnota se stanoví jako součet hodnot příslušných segmentů dílčích účelových funkcí $\sum Z_{jp_j}$ pro odpovídající x_j .

V našem ilustrativním příkladu na obrázku 4.4 tímto rozdělením zároveň vznikne množina bodů, které se stanou kandidáty na optimální řešení úlohy. Připomeňme, že v tuto chvíli neuvažujeme v ilustrativním příkladu existenci omezujících podmínek

úlohy, až na podmínky nezápornosti. Nové body vzniknou ve všech uzlech rastru a také jeho průsečících s osami. Množina takovýchto bodů \mathcal{M} je definována jako

$$\mathcal{M} = \left\{ \begin{array}{l} [k_{11}, 0], [k_{12}, 0], [k_{13}, 0], \\ [0, k_{21}], [k_{11}, k_{21}], [k_{12}, k_{21}], [k_{13}, k_{21}], \\ [0, k_{22}], [k_{11}, k_{22}], [k_{12}, k_{22}], [k_{13}, k_{22}], \\ [0, k_{23}], [k_{11}, k_{23}], [k_{12}, k_{23}], [k_{13}, k_{23}] \end{array} \right\} \quad (4-2-6)$$

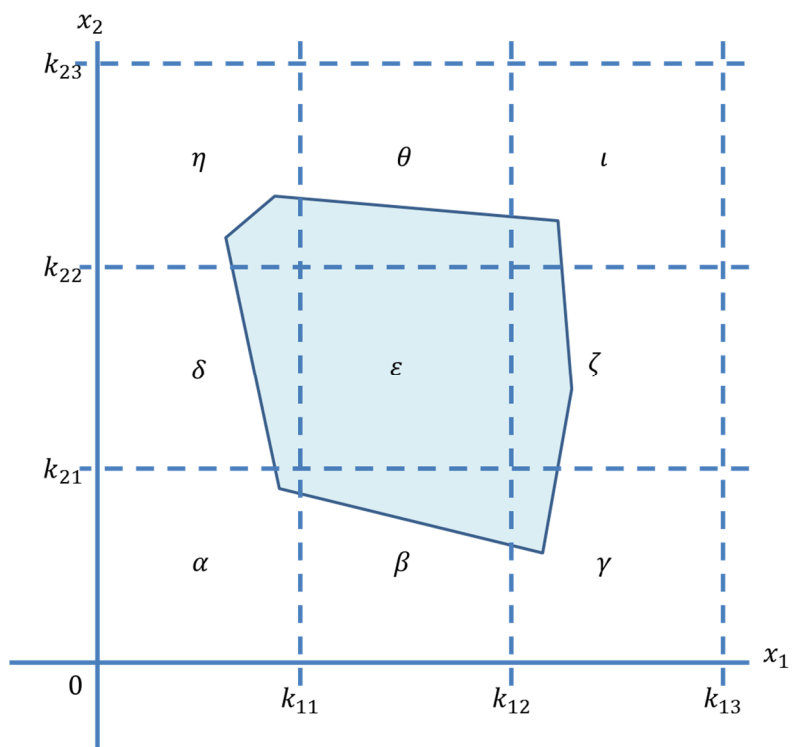
Bod počátku soustavy souřadnic zde nepovažujeme za „nový“, neboť vychází z podmínek nezápornosti v modelu již obsažených. Tyto body jsou v modelu po částech lineárního programování (4-1-1) vzaty v potaz zařazením podmínky (4-1-3). To znamená, že i v těchto bodech budou nově existovat přípustná bazická řešení. V případě konvexního modelu je všeobecně známo a dokázáno, že optimální řešení úlohy leží na hranici množiny přípustného řešení, tj. konvexního polyedru. Protože je tato úloha nelineární, může různými kombinacemi směrnic dílčích účelových funkcí dojít k tomu, že optimum úlohy se může nacházet i v některém z bodů množiny \mathcal{M} (4-2-6). Samozřejmě za předpokladu, že jsou vybrané body množiny \mathcal{M} součástí množiny přípustného řešení úlohy.

Tvrzení, že optimální řešení v případě nekonvexní úlohy může ležet i „uvnitř“²⁰ množiny přípustných řešení a nikoliv jen na její hranici je odůvodněné. U konvexní úlohy předpokládáme předvídatelný růst (pokles) účelové funkce na celém jejím definičním oboru, proto se i její optimální hodnoty vždy budou nalézat na hranici prostoru přípustných řešení. Představíme-li si, že se v některém okamžiku hledání optimálního řešení nalézáme „uvnitř“ prostoru přípustného řešení, *potom zcela jistě existuje nějaká lepší hodnota účelové funkce na hranici tohoto prostoru, a to ve směru růstu (klesání) účelové funkce dané její směrnicí*²¹.

U nekonvexní účelové funkce toto neplatí, neboť může existovat takový segment dílčí účelové funkce, který právě „uvnitř“ množiny přípustných řešení zlepšuje její hodnotu více oproti hranicím prostoru přípustných řešení. Zde je evidentní úskalí optimalizace s nekonvexní účelovou funkcí, která může v libovolných intervalech svého definičního oboru měnit chování z hlediska své směrnice. To můžeme ilustrovat na následujícím obrázku 4.5:

²⁰ V takovém bodě, kdy žádná z omezujících podmínek není splněna jako rovnice.

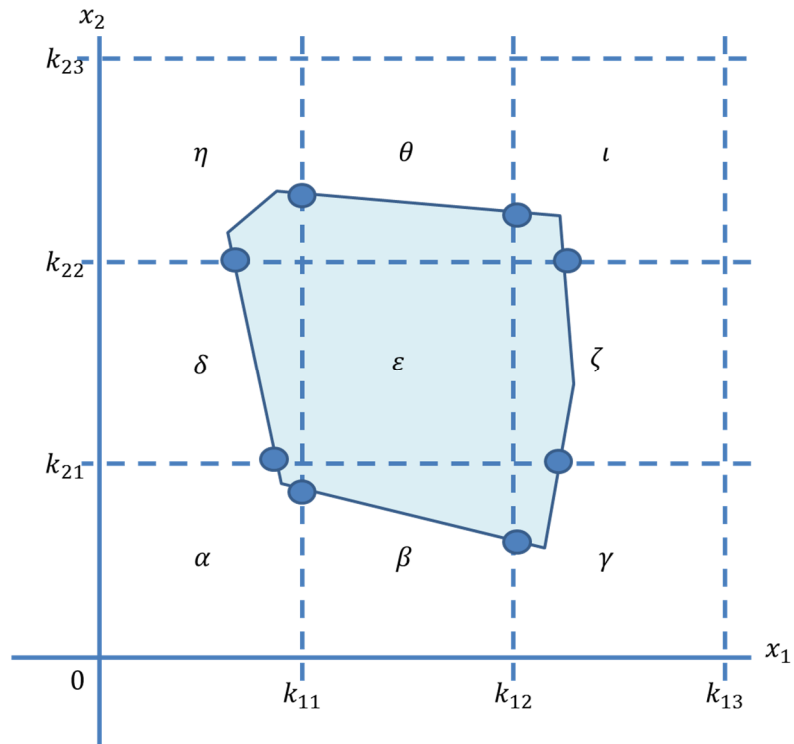
²¹ Toto tvrzení je platné tehdy, je-li prostorem řešení konvexní polyedr. V řešené úloze je prostor řešení konvexní, jelikož je určen pouze omezeními lineárního charakteru.



Obrázek 4.5: Existence optimálního řešení nekonvexní úlohy.

V tomto obrázku (4.5) je nově přidána množina přípustných řešení vycházející z omezujících podmínek úlohy. Tato množina je zde vyjádřena nepravidelným šestiúhelníkem. Na obrázku vidíme, že vícerozměrný interval ε je do množiny přípustných řešení zcela vnořen. V případě, že by hodnota účelové funkce v tomto intervalu $Z(\mathbf{x}) = Z_{12}(x_1) + Z_{22}(x_2)$ byla příznivější než v ostatních intervalech, je možné, že optimální řešení bude ležet v některém z vrcholů intervalu ε .

Pokud bychom přidali navíc množinu přípustných řešení danou omezujícími podmínkami úlohy, kterou jsme u ilustrativního příkladu na obrázku (4.4) doposud zanedbávali, potom by novými kandidáty na optimální řešení byly i všechny body, které vzniknou jako průsečíky rastru s hranicí množiny přípustných řešení úlohy. Situaci je zobrazena na obrázku 4.6.



Obrázek 4.6: Průsečíky rastru s množinou přípustných řešení.

Zde vidíme, že průnikem rastru s množinou přípustných řešení získáme 8 nových významných bodů – kandidátů na optimální řešení. Pro tento případ je tedy celkově

- 6 vrcholů původní množiny přípustných řešení – ty jsou určeny původními omezujícími podmínkami úlohy,
- 8 průsečíků množiny přípustných řešení s rastrem – tyto body jsou určeny přidáním podmínek dělicích bodů do modelu,
- 4 vrcholy vícerozměrného intervalu ε – tyto body jsou rovněž určeny přidáním podmínek dělicích bodů do modelu. Nejedná se sice o průsečíky s omezujícími podmínkami, ale je nutné je také uvažovat, protože jsou do množiny přípustných řešení vloženy²².

Úloha má celkem 18 kandidátů na optimální řešení. Nárůst počtu možností může být značný, v tomto případě o 200%, přičemž se jedná „pouze“ o úlohu dvou rozhodovacích

²² Vrcholy vícerozměrných intervalů nelze dle tohoto zobrazení považovat za vrcholy konvexního polyedru úlohy. Zavedeme-li však do modelu podmínky dělicích bodů, potom s každou přidanou podmínkou dělicího bodu vzroste dimenze řešené úlohy o jedna. Proměnné rozdílových bodů tedy mohou taktéž tvořit báze řešení úlohy, a proto se z tohoto pohledu jedná o vrcholy konvexního polyedru (rozšířené úlohy).

proměnných a šesti omezujících podmínek. Nárůst počtu kandidátů na optimální řešení je značně variabilní a přímo závisí na počtu lineárních segmentů **každé** z dílčích funkcí souhrnné po částech lineární funkce a na počtu proměnných modelu.

Pro zobecnění dodejme, že tento ilustrativní příklad lze rozšířit i pro n -dimenzionální zobrazení, kde už reálně nelze hovořit o „rastru“ ve smyslu mřížky, neboť ten je v n -D tvořen nikoliv polopřímkami, ale nadrovinami.

4.3 Hledání optimálního řešení úlohy

Nyní již máme nadefinovaný prostor přípustných řešení úlohy po částech lineárního programování i se všemi jeho specifiky. Tato specifika spočívají zejména v zavedení dělicích bodů do modelu, čímž dojde k navýšení počtu kandidátů na optimální řešení úlohy. Další fází je nalezení způsobu, kterým by bylo tyto kandidáty vhodné zkoumat. V případě iterativních algoritmů jako je simplexový algoritmus hovoříme o postupném procházení jednotlivých kandidátů na optimální řešení a generování posloupnosti bodů, z nichž ve finále zvolíme na základě porovnání hodnot účelových funkcí kandidáta, který má optimální hodnotu účelové funkce. Připomeňme, že se nemusí jednat o jediné řešení, ale těchto řešení může být více, případně též toto řešení v nepříznivém případě nemusí existovat vůbec.

Pokud by se jednalo o konvexní typ úlohy, nebylo by procházení prostoru přípustných řešení problematické. S využitím některého iterativního (simplexového, gradientního) algoritmu bychom postupovali ve směru růstu účelové funkce přes jednotlivé kandidáty na optimum, až bychom se dobrali nejlepší hodnoty účelové funkce v některém z nich – optimálního řešení. Zde je důležité podotknout, že u těchto typů úloh není třeba se v postupu napříč množinou přípustných řešení vracet, ani není nutné postup větvit do více směrů, jelikož je směr postupu jednoznačný.

U nekonvexní úlohy narážíme na dva problémy, s nimiž je nutné se při postupu prostorem přípustných řešení vypořádat. Kdybychom na řešení nekonvexní úlohy aplikovali stejný postup jako u konvexní úlohy, mohlo by dojít ke dvěma nežádoucím situacím:

- „Optimální“ řešení bylo nalezeno, ovšem skutečné optimální řešení jsme při procházení prostoru přípustných řešení „minuli“.
- „Optimální“ řešení bylo nalezeno. Cesta dále indikuje zhoršování hodnoty účelové funkce. Skutečné optimální řešení však skutečně leží někde dále

za nalezeným „optimálním“ řešením, protože hodnota nekonvexní účelové funkce se začne opět zlepšovat.

Jak ukazuje Houška (2002), aplikací algoritmu pro řešení po částech lineární konvexní úlohy na její nekonvexní případ se k optimálnímu řešení nedostaneme. Při dosažení některého nekonvexního zlomu dílčí po částech lineární funkce během výpočtu je algoritmus ukončen, protože se ukazuje, že hodnota účelové funkce může neomezeně růst. To se však děje pouze zdánlivě, neboť ve skutečnosti optimální řešení úlohy může existovat. Ve skutečnosti jen v simplexovém algoritmu dojde k tomu, že není možné vybrat proměnnou, která v dalším kroku opustí stávající bazické řešení. Simplexový algoritmus si ve své modifikaci pro po částech lineární konvexní model s nekonvexností nedokáže poradit.

Abychom se vypořádali s problémy nekonvexnosti účelové funkce je potřeba k postupu napříč prostorem přípustných řešení postupovat jiným způsobem tak, aby nebylo možné optimální řešení minout, anebo jej nedosáhnout.

4.3.1 Kombinatorické řešení

U úloh s malým počtem proměnných a omezujících podmínek je možné nekonvexní problém vyřešit poměrně triviálním způsobem. Jsme-li schopni prostor řešení rozumně graficky zobrazit (čili pro účelovou funkci nejvýše třech rozhodovacích proměnných), potom jsme také schopni identifikovat všechny možné kandidáty na optimální řešení. Pro každého z nich je možné určit příslušnou hodnotu účelové funkce podle toho, ve kterém vícerozměrném intervalu se nachází. Známe-li množinu všech přípustných bazických řešení, potom snadno jako optimální vybereme to řešení, v němž nabývá účelová funkce svého maxima (minima). Tímto způsobem není možné žádné z přípustných bazických řešení opomenout, protože se nejedná o průchod prostorem přípustných řešení iterativním způsobem.

Toto je kombinatorický přístup k řešení, který je samozřejmě pro úlohy větších rozměrů silně neefektivní. Navíc pro úlohy v n -D pro $n > 3$ není snadné určit všechny možné kandidáty na optimální řešení jednoduchým způsobem. Museli bychom nalézt všechny průniky dělicích nadrovin a k tomu i vrcholy vzniklé přidáním podmínek dělicích bodů do souboru omezujících podmínek. Nalezení množiny těchto bodů je velmi náročné na ruční výpočet a stejně tak náročné i s využitím výpočetní techniky v případě $n \gg 3$.

4.3.2 Rozdělení na sub-úlohy

Komplexní úlohu je možné rozložit na určité množství sub-úloh. Potom by bylo nutné nalézt optimální řešení všech těchto sub-úloh a tato řešení navzájem porovnat. Za optimální bychom považovali ta řešení, která by vykazovala nejlepší hodnotu účelové funkce. K rozdělení na sub-úlohy lze využít hlediska dělicích bodů popsaných v kapitole 4.2.2. Má-li úloha pro každou dílčí účelovou funkci Z_1, Z_2, \dots, Z_j právě p dělicích bodů včetně hraničních bodů, potom existuje právě $p^2 - 2p + 1$ sub-úloh, které je potřeba samostatně vyřešit pro nalezení optimálního řešení. Každá sub-úloha odpovídá jednomu vícerozměrnému intervalu neboli jedné oblasti rastru, viz obrázek 4.3. Každá sub-úloha je samostatnou optimalizační úlohou, u níž hledáme optimální řešení vždy podle jednoho odpovídajícího fragmentu souhrnné účelové funkce.

Obecná formulace sub-úlohy je

Maximalizujte $Z_{h_1, h_2, \dots, h_n}(\mathbf{x})$

za podmínek

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i, i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n \quad (4-3-1)$$

$$x_j \leq k_{jh_j}, j = 1, 2, \dots, n; h_j = 1, 2, \dots, p_j$$

$$x_j \geq k_{jh_{j-1}}, j = 1, 2, \dots, n; h_j = 1, 2, \dots, p_j$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

Sub-úloha sestává z původních omezujících podmínek úlohy, podmínek nezápornosti řešení a nově jsou zde přidány omezení dělicími body $k_{jh_{j-1}}, k_{jh_j}$ zleva i zprava. Prostor přípustných řešení je tak omezen pouze na některý vícerozměrný interval $\langle k_{jh_{j-1}}; k_{jh_j} \rangle$.

Vyřešení všech $p^2 - 2p + 1$ sub-úloh lineárního programování je z hlediska výpočetní složitosti taktéž časově i prostorově „nákladné“, přesto však efektivnější než řešení kombinatorické. V případě rozdělení na sub-úlohy totiž není nutně potřeba zkoumat veškeré kandidáty na optimální řešení. V každé sub-úloze směřujeme jednoznačně k jejímu optimálnímu řešení, protože se jedná o lineární úlohu. Na druhou stranu je na počátku každé takové sub-úlohy třeba nejprve nalézt některou přípustnou kanonickou bázi. Tento proces závisí na charakteru omezujících podmínek úlohy a v případě většího počtu omezujících podmínek typu $\mathbf{Ax} \geq \mathbf{b}$ může být značně zdlouhavý. I v případě,

že v původních omezujících podmínkách není podmínka tohoto typu zastoupena, bude mít úloha n podmínek

$$x_j \geq k_{jh_{j-1}}, j = 1, 2, \dots, n; h_j = 1, 2, \dots, p_j \quad (4-3-2)$$

Jedná se o tutéž sadu podmínek jako v (4-3-1).

Každá sub-úloha je sama o sobě optimalizační úlohou, takže v porovnání s kombinatorickým řešením zde dochází k jisté úspoře výpočetních prostředků.

4.3.3 Rozložení účelové funkce na fragmenty

Kombinatorický přístup i dělení úlohy na sub-úlohy se nejeví být efektivními přístupy k řešení optimalizačních úloh s nekonvexní po částech lineární souhrnnou účelovou funkcí. První přístup řeší problém *hrubou silou*. Tento přístup je všeobecně tím nejméně efektivním v oblasti algoritmizace. Také druhý přístup má své nevýhody, které jsou zmíněny v oddíle (4.3.2). V následujícím textu bude představen odlišný přístup k hledání optimálního řešení této úlohy.

V modelu s nekonvexní po částech lineární souhrnnou účelovou funkcí přistupujeme k této funkci určitým specifickým způsobem, jak je podrobně popsáno v oddíle (4.2.2). Souhrnná účelová funkce Z sestává ze součtu n dílčích účelových funkcí. Každá (resp. alespoň jedna) z těchto funkcí Z_1, Z_2, \dots, Z_n má po částech lineární průběh a jak bylo popsáno v kapitole 4.2.2, na základě jednotlivých lineárních segmentů těchto funkcí je možné rozdělit prostor na $p^2 - 2p + 1$ vícerozměrných intervalů. V každém z těchto vícerozměrných intervalů roste či klesá dílčí účelová funkce jinou rychlostí. To lze také chápat tak, že v každém z těchto intervalů směřujeme k optimálnímu řešení různým tempem. **Pokud budeme na míru růstu fragmentů souhrnné účelové funkce pro jednotlivé vícerozměrné intervaly nahlížet jako na kritérium postupu k optimálnímu řešení, potom můžeme i na celou úlohu nahlížet jako na vícekriteriální optimalizační problém.** Řešení původního modelu s po částech lineární účelovou funkcí je jedním z nedominovaných řešení, neboť nejlepší hodnota účelové funkce je jistě nejlepší hodnotou daného segmentu funkce a tedy nemůže být dominována.

V takovém případě je pak každý fragment souhrnné účelové funkce rozšířen na celou množinu přípustných řešení.

Na základě těchto předpokladů definujeme finální podobu matematického modelu, na němž budou demonstrovány dále navrhované postupy. Model nazveme Model s po

částech lineární účelovou funkcí jako model vícekriteriálního programování a označíme jej zkratkou PWLP-MC (PieceWise Linear Programming – Multiple Criteria). Tento model vychází z modelu PWLP-B (4-1-6). Model PWLP-MC je definován následujícím způsobem:

$$\text{Maximalizujte } \mathbf{Z}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} Z_{1,1,\dots,1} \\ \vdots \\ Z_{h_1,h_2,\dots,h_n} \\ \vdots \\ Z_{p_1,p_2,\dots,p_n} \end{pmatrix}$$

za podmínek

(4-3-3)

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i, i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$$

$$x_j + r_{jk}^- - r_{jk}^+ = k_{jk}, j = 1, 2, \dots, n; k = 1, 2, \dots, p_j$$

$$r_{jk}^- \cdot r_{jk}^+ = 0, j = 1, 2, \dots, n; k = 1, 2, \dots, p_j$$

$$x_j, r_{jk}^-, r_{jk}^+ \geq 0$$

kde $Z_{1,1,\dots,1}$ je fragment souhrnné účelové funkce odpovídající prvnímu vícerozměrnému intervalu, který je určen pro každou proměnnou intervalem $\langle 0; k_{j1} \rangle$. Z_{h_1,h_2,\dots,h_n} je fragment souhrnné účelové funkce odpovídající jednotlivým vícerozměrným intervalům $\langle k_{jh_{j-1}}; k_{jh_j} \rangle, \forall j = 1, 2, \dots, n$. Až Z_{p_1,p_2,\dots,p_n} je fragment souhrnné účelové funkce odpovídající poslednímu vícerozměrnému intervalu, který je určen pro každou proměnnou intervalem $\langle k_{jp_{j-1}}; K_j \rangle$, kde K_j je hodnota dle (4-2-2).

4.4 Řešení problému s využitím vícekriteriálního simplexového algoritmu

Řešení vícekriteriálních optimalizačních problémů je popsáno v oddíle (3.3) a jsou zde zmíněny čtyři přístupy k řešení těchto úloh. Metoda *agregace účelových funkcí* je pro řešení této úlohy nevhodná, neboť neprochází všechna nedominovaná řešení úlohy. Metoda *parciální optimalizace* zase nezaručuje, že bude nalezeno optimální řešení z hlediska všech kritérií. Využití této metody pro řešení naší úlohy by znamenalo optimalizovat na celém prostoru řešení s využitím pouze jedné účelové funkce. Individuální účelové funkce jsou však definovány pouze na určitém vícerozměrném intervalu a neexistují na celém prostoru přípustných řešení. Tato úloha by nedávala smysl. Využití *metody NISE* je pro tento případ taktéž neadekvátní, protože tato metoda

poskytuje pouze aproximované řešení. Naším cílem je nalézt řešení přesné – optimální. Cílové programování není pro tento případ vhodné, neboť není jasné, jakým způsobem nastavit cíle tak, aby nebyly porušeny parametry původní úlohy.

Poslední z popsaných metod je *vícekriteriální simplexový algoritmus*. **Tento algoritmus najde všechna nedominovaná řešení vícekriteriální úlohy.** V řešení úlohy s po částech lineární účelovou funkcí je množina všech kandidátů na optimální řešení podmnožinou množiny všech nedominovaných bazických řešení. Množina všech kandidátů již byla popsána v (4.2.2). Budeme řešit úlohu PWLP-MC dle (4-3-3). Pokud nalezneme všechna nedominovaná řešení úlohy, potom jistě některé z těchto řešení je také optimálním řešením úlohy PWLP.

4.5 Ilustrativní úloha hledání optimálního řešení (I) – Monotónní případ

V této kapitole bude představeno řešení komplexní optimalizační úlohy s nekonvexní po částech lineární funkcí. Pro zvolenou úlohu bude popsán převod na rozšířený model úlohy, převod rozšířeného modelu úlohy do kanonické formy, jeho zápis do modifikované simplexové tabulky a jednotlivé kroky řešení vedoucí k nalezení optimálního řešení.

Je zadána úloha

$$\text{maximalizujte } \mathbf{Z}(x) = Z_1(x_1) + Z_2(x_2)$$

za podmínek

$$x_1 \geq 6$$

$$x_1 \leq 23$$

$$x_2 \geq 8$$

$$x_2 \leq 26$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

kde

(4-5-1)

$$Z_1(x_1) = x_1, x_1 \in \langle 0,10 \rangle$$

$$Z_1(x_1) = 0,5x_1 + 5, x_1 \in \langle 10,20 \rangle$$

$$Z_1(x_1) = 2x_1 - 25, x_1 \in \langle 20,30 \rangle$$

$$Z_2(x_2) = 2x_2, x_2 \in \langle 0,10 \rangle$$

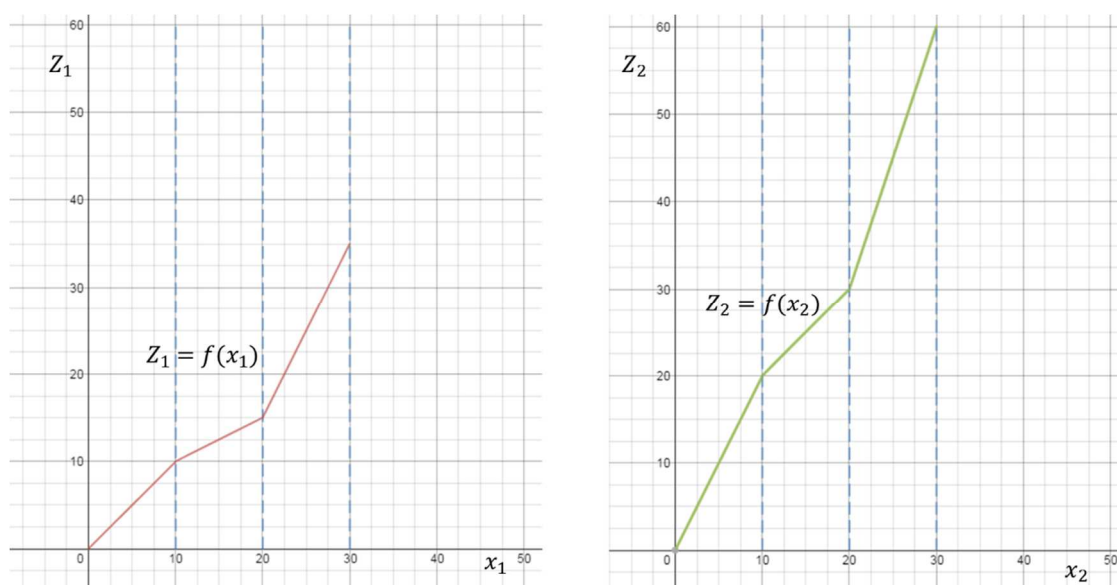
$$Z_2(x_2) = x_2 + 10, x_2 \in \langle 10,20 \rangle$$

$$Z_2(x_2) = 3x_2 - 30, x_2 \in \langle 20,30 \rangle$$

Volba všech koeficientů úlohy není náhodná. Všechny koeficienty byly zvoleny tak, aby úloha byla pro čtenáře dostatečně pochopitelná, aby bylo během výpočtu počítáno převážně s celými čísly a také aby bylo možné ukázat silné a slabé stránky aplikovaného algoritmu na tuto konkrétní úlohu.

4.5.1 Prostor řešení úlohy

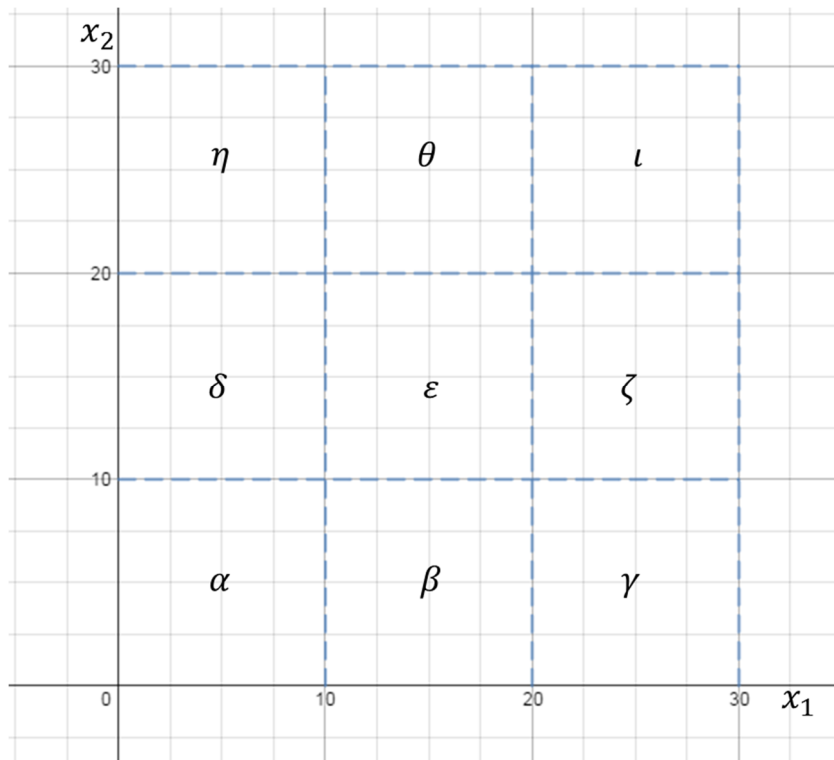
Pro lepší představu můžeme nejprve ukázat, jak vypadají dílčí po částech lineární účelové funkce pro každou z proměnných x_1, x_2 . Na obrázku 4.7 je průběh obou dílčích po částech lineárních funkcí.



Obrázek 4.7: Průběh účelových funkcí $Z_1(x_1)$ a $Z_2(x_2)$, (vytvořeno v DGC).

Obě tyto dílčí účelové funkce zde mají 3 lineární segmenty, jejichž směrnice jsou různé v závislosti na hodnotě x_1 a x_2 . Obě funkce jsou, jak už je patrné z obrázku, nekonvexní a zároveň spojité a rostoucí.

V oddíle (4.2.2) bylo ukázáno, že na základě jednotlivých lineárních segmentů dílčích účelových funkcí lze rozdělit prostor řešení na určitý počet vícerozměrných intervalů. Toto rozdělení je zobrazeno na obrázku 4.8.

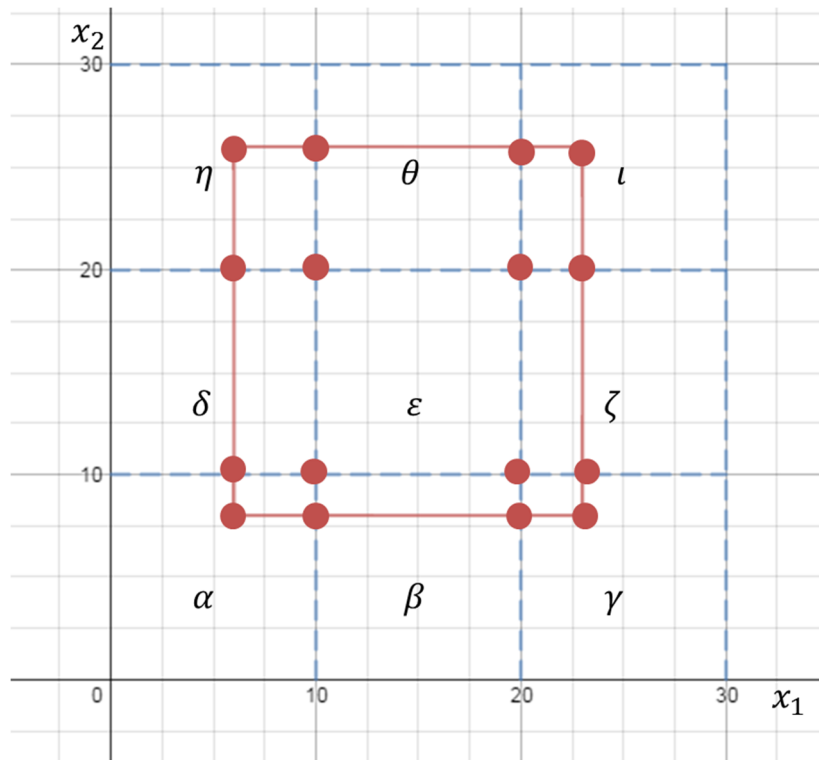


Obrázek 4.8. Rozdělení prostoru přípustných řešení na vícerozměrné intervaly.

Tyto intervaly označme opět $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta, \eta, \theta, \iota$, aby bylo snazší se na ně odkazovat během výpočtu. V každém z nich lze identifikovat unikátní míru růstu účelové funkce pro obě proměnné x_1, x_2 . Dostaneme následující fragmenty účelové funkce:

$$\begin{aligned}
 Z_{\alpha}(\mathbf{x}) &= x_1 + 2x_2, \forall (x_1, x_2) \in \alpha \\
 Z_{\beta}(\mathbf{x}) &= 0,5x_1 + 2x_2 + 5, \forall (x_1, x_2) \in \beta \\
 Z_{\gamma}(\mathbf{x}) &= 2x_1 + 2x_2 - 25, \forall (x_1, x_2) \in \gamma \\
 Z_{\delta}(\mathbf{x}) &= x_1 + x_2 + 10, \forall (x_1, x_2) \in \delta \\
 Z_{\varepsilon}(\mathbf{x}) &= 0,5x_1 + x_2 + 15, \forall (x_1, x_2) \in \varepsilon \\
 Z_{\zeta}(\mathbf{x}) &= 2x_1 + x_2 - 15, \forall (x_1, x_2) \in \zeta \\
 Z_{\eta}(\mathbf{x}) &= x_1 + 3x_2 - 30, \forall (x_1, x_2) \in \eta \\
 Z_{\theta}(\mathbf{x}) &= 0,5x_1 + 3x_2 - 25, \forall (x_1, x_2) \in \theta \\
 Z_{\iota}(\mathbf{x}) &= 2x_1 + 3x_2 - 55, \forall (x_1, x_2) \in \iota
 \end{aligned}
 \tag{4-5-2}$$

Dále do téhož schématu zavedeme omezující podmínky úlohy včetně všech významných bodů úlohy – kandidátů na optimální řešení. Množina těchto kandidátů je popsána v oddíle (4.2.2). Situace je zobrazena na následujícím obrázku (4.9):



Obrázek 4.9: Množina kandidátů na optimální řešení.

Množina všech přípustných řešení není vyšrafována z důvodu přehlednosti. Tato množina se nachází „uvnitř“ a na hranicích nově přidaného obdélníku s vrcholy $[6,8]$, $[23,8]$, $[23,26]$, $[6,26]$ do schématu.

Existuje celkem 16 kandidátů na optimální řešení. Kandidáty lze rozdělit do tří podskupin:

- Vrcholy množiny přípustných řešení dané omezujícími podmínkami úlohy. Tyto vrcholy jsou 4.
- Uzly rastru. Tyto uzly jsou také 4 a na obrázku se jedná o vrcholy vícerozměrného intervalu ε .
- Průsečíky rastru vícerozměrných intervalů s množinou přípustných řešení. Těchto bodů vznikne 8.

V této úloze tedy přibude 12 nových potenciálních optimálních řešení oproti případu, kdy by účelové funkce měla lineární charakter. Tento nárůst není elegantně zobecnitelný, neboť závisí na tvaru množiny přípustných řešení stejně jako na struktuře rastru.

4.5.2 Modifikace úlohy a převod do kanonického tvaru

Pro účely linearizace úlohy přidáme k původní úloze podmínky dělicích bodů dle (4-1-3):

$$\begin{aligned}
 x_1 + r_{11}^- - r_{11}^+ &= 10 \\
 x_1 + r_{12}^- - r_{12}^+ &= 20 \\
 x_2 + r_{21}^- - r_{21}^+ &= 10 \\
 x_2 + r_{22}^- - r_{22}^+ &= 20
 \end{aligned}
 \tag{4-5-3}$$

a tuto úlohu převedeme do kanonického tvaru přidáním doplňkových a pomocných proměnných. Označme doplňkovou proměnnou d_i a pomocnou proměnnou p_i . Potom je kanonický tvar úlohy následující:

$$\begin{aligned}
 &\text{Maximalizujte } \mathbf{Z}(\mathbf{x}) = (Z_\alpha(\mathbf{x}) \dots Z_l(\mathbf{x}))^T \\
 &\text{za podmínek} \\
 &x_1 - d_1 + p_1 = 6 \\
 &x_1 + d_2 = 23 \\
 &x_2 - d_3 + p_2 = 8 \\
 &x_2 + d_4 = 26 \\
 &x_1 + r_{11}^- - r_{11}^+ = 10 \\
 &x_1 + r_{12}^- - r_{12}^+ = 20 \\
 &x_2 + r_{21}^- - r_{21}^+ = 10 \\
 &x_2 + r_{22}^- - r_{22}^+ = 20 \\
 &x_1, x_2 \geq 0
 \end{aligned}
 \tag{4-5-4}$$

kde

$$\begin{aligned}
 Z_\alpha(\mathbf{x}) &= x_1 + 2x_2 - 10p_1 - 10p_2, \forall (x_1, x_2) \in \alpha \\
 Z_\beta(\mathbf{x}) &= 0,5x_1 + 2x_2 + 5 - 10p_1 - 10p_2, \forall (x_1, x_2) \in \beta \\
 Z_\gamma(\mathbf{x}) &= 2x_1 + 2x_2 - 25 - 10p_1 - 10p_2, \forall (x_1, x_2) \in \gamma \\
 Z_\delta(\mathbf{x}) &= x_1 + x_2 + 10 - 10p_1 - 10p_2, \forall (x_1, x_2) \in \delta \\
 Z_\varepsilon(\mathbf{x}) &= 0,5x_1 + x_2 + 15 - 10p_1 - 10p_2, \forall (x_1, x_2) \in \varepsilon \\
 Z_\zeta(\mathbf{x}) &= 2x_1 + x_2 - 15 - 10p_1 - 10p_2, \forall (x_1, x_2) \in \zeta \\
 Z_\eta(\mathbf{x}) &= x_1 + 3x_2 - 30 - 10p_1 - 10p_2, \forall (x_1, x_2) \in \eta \\
 Z_\theta(\mathbf{x}) &= 0,5x_1 + 3x_2 - 25 - 10p_1 - 10p_2, \forall (x_1, x_2) \in \theta \\
 Z_l(\mathbf{x}) &= 2x_1 + 3x_2 - 55 - 10p_1 - 10p_2, \forall (x_1, x_2) \in \iota
 \end{aligned}$$

K podmínkám dělicích bodů již není třeba přidávat doplňkové ani pomocné proměnné, neboť rozdílové proměnné r_{jk}^- samy o sobě vytváří kanonickou bázi.

4.5.3 Zápis modelu do modifikované simplexové tabulky

Pro aplikace vícekriteriálního simplexového algoritmu pro řešení nekonvexní úlohy vytvoříme speciální modifikovanou tabulku následující struktury (T4.2). K této tabulce je připojena i legenda (T4.1).

Intervaly	Jednotlivé vícerozměrné intervaly $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta, \eta, \theta, \iota \dots$
Cenové koeficienty dílčích ÚF	Cenové koeficienty pro každý vícerozměrný interval $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta, \eta, \theta, \iota \dots$
cB	Sloupec cen bazických proměnných
xB	Báze simplexové tabulky
Názvy proměnných	Výčet všech proměnných modelu
Koeficienty A	Levostranné koeficienty matice soustavy $Ax \leq b$
b	Vektor pravých stran soustavy $Ax \leq b$
Ω	Sloupec hodnot testu přípustnosti báze
Stínové ceny dílčích ÚF	Stínové ceny pro každý vícerozměrný interval $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta, \eta, \theta, \iota \dots$
$Z(\mathbf{x})\text{-c}$	„nepravé“ hodnoty účelových funkcí (bez konstantních členů)
$Z(\mathbf{x})$	Skutečné hodnoty účelových funkcí v jednotlivých vícerozměrných intervalech

Tabulka T4.1: Charakteristika částí modifikované simplexové tabulky.

Následuje výchozí modifikovaná simplexová tabulka. Pro účely této úlohy se omezíme pouze na stručné pojmenování *simplexová tabulka*. V tabulkách se také omezíme na zjednodušenou notaci indexů proměnných a nebudeme používat dolní a horní indexaci proměnných. Zavedeme pro všechny simplexové tabulky konvenci notace: $x_i^j \equiv x_{ij}$. Příkladem budiž rozdílová proměnná r_{11}^+ , kterou uvedeným způsobem budeme označovat jako $r11 +$.

	I n t e r v a l y	Cenové koeficienty dílčích účelových funkcí		
cB	xB	Názvy proměnných	b	Ω
Ceny	B á z e	Koeficienty A	Pravé strany	Test přípust nosti
	I n t e r v a l y	Stínové ceny dílčích účelových funkcí	Z(X)-c	Z(X)

Tabulka T4.2: Obecná struktura modifikované simplexové tabulky.

dvě pomocné proměnné. Z toho důvodu je v tento moment bezpředmětné interpretovat hodnoty účelových funkcí v jednotlivých intervalech.

Následuje volba proměnné vstupující do báze. V úvahu připadají sloupce proměnných x_1 a x_2 . Porovnáním hodnot v obou sloupcích zjistíme, že tyto sloupce jsou vzájemně nedominované, jelikož neplatí, že $x_{ij} \geq x'_{ij}$ ²³. Není proto jednoznačné, který sloupec zvolit jako klíčový. Z teoretického popisu vícekritériálního simplexového algoritmu je známo, že je potřeba prověřit obě možnosti. V tomto případě se prověřováním obou možností není potřeba zabývat, jak uvidíme dále.

Definujeme dvě nová pravidla pro volbu klíčového sloupce:

- Jako klíčový sloupec není volen takový sloupec, jehož proměnná vystoupila z báze v předchozím kroku. Tato volba by totiž vedla k faktickému návratu k předchozímu bazickému řešení.
- V případě existence více než jednoho nedominovaného řešení je sice třeba prověřit všechna tato řešení, je však třeba zvolit takové řešení, kterým začneme. Zavedeme konvenci lexikografického přístupu²⁴ k volbě klíčového sloupce, tzn. volíme klíčový sloupec první zleva, který splňuje předchozí pravidlo.

Dodejme, že totéž pravidlo budeme uplatňovat i pro nejednoznačnost výběru klíčového řádku. Tento postup volíme s ohledem na fakt, že v případě navrženého algoritmu je třeba prověřovat veškeré možnosti. Jde tedy jen o to zvolit možnost, u níž prověřování započneme, a pokročilé metody výběru²⁵ zde nemají opodstatnění.

Zvolíme tedy sloupec proměnné x_1 jako klíčový. Vypočteme hodnoty testu přípustnosti obvyklým způsobem jako $\frac{b}{x_1}$. Z podílů pro $x_1 > 0$ zvolíme minimální podíl, a proto jako klíčový řádek volíme řádek proměnné p_1 . Proměnná x_1 nahradí proměnnou p_1 v následující bázi. Tato změna je v prvním kroku obdobných úloh obvyklá a žádoucí a vyjadřuje přesun směrem k množině přípustných řešení, pokud je tato množina neprázdná. V tabulce jsou klíčové sloupce a řádky podbarveny.

Následuje další krok, viz tabulka T4.4.

²³ Ostře větší alespoň pro jedno i

²⁴ Někdy se také tato volba nazývá jako *Blandovo pravidlo*.

²⁵ Jako například perturbace pravých stran tabulky.

cB	xB	x1	x2	r11-	r11+	r12-	r12+	r21-	r21+	r22-	r22+	d1	d2	d3	d4	p1	p2	b	Ω
	x1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	1	0	6	-
	d2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	-1	0	17	-
	p2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	1	8	8
	d4	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	26	26
	r11-	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	-1	0	4	-
	r12-	0	0	0	0	1	-1	0	0	0	0	1	0	0	0	-1	0	14	-
	r21-	0	1	0	0	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	10	10
	r22-	0	1	0	0	0	0	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	20	20
	alfa	0	-12	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	10	0	11	0	-74	-74
	beta	0	-12	0	0	0	0	0	0	0	0	-0,5	0	10	0	10,5	0	-77	-72
	gama	0	-12	0	0	0	0	0	0	0	0	-2	0	10	0	12	0	-68	-93
	delta	0	-11	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	10	0	11	0	-74	-64
	epsilon	0	-11	0	0	0	0	0	0	0	0	-0,5	0	10	0	10,5	0	-77	-62
	zeta	0	-11	0	0	0	0	0	0	0	0	-2	0	10	0	12	0	-68	-83
	eta	0	-13	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	10	0	11	0	-74	-104
	theta	0	-13	0	0	0	0	0	0	0	0	-0,5	0	10	0	10,5	0	-77	-102
	iota	0	-13	0	0	0	0	0	0	0	0	-2	0	10	0	12	0	-68	-123

Tabulka T4.4: Ilustrativní úloha (I), krok (II).

Novou tabulku získáme s využitím Jordanovy eliminační metody. V této tabulce je stále řešení nepřipustné díky přítomnosti p_2 . V dalších krocích už není možné přistupovat k výpočtu stínových cen dle obvyklého $z_j - c_j$, pro každý segment účelové funkce by musel být v tabulce jiný sloupec. Proto vypočteme stínové ceny pro všechny vícerozměrné intervaly pomocí Jordanovy eliminace kriteriálních řádků.

Stínové ceny identifikují opět dvě možnosti výběru klíčového sloupce. V tomto případě sloupec x_2 všemi hodnotami dominuje sloupec d_1 , a proto volíme jednoznačně sloupec x_2 jako klíčový. Ten dle testu přípustnosti vystřídá v bázi proměnnou p_2 . Realizujeme přepočítání a získáváme v třetím kroku tabulku T4.5.

cB	xB	x1	x2	r11-	r11+	r12-	r12+	r21-	r21+	r22-	r22+	d1	d2	d3	d4	p1	p2	b	Ω
	x1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	1	0	6	-
	d2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	-1	0	17	17
	x2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	1	8	-
	d4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	-1	18	-
	r11-	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	-1	0	4	4
	r12-	0	0	0	0	1	-1	0	0	0	0	1	0	0	0	-1	0	14	14
	r21-	0	0	0	0	0	0	1	-1	0	0	0	0	1	0	0	-1	2	-
	r22-	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-1	0	0	1	0	0	-1	12	-
	alfa	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	-2	0	11	12	22	22
	beta	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-0,5	0	-2	0	10,5	12	19	24
	gama	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-2	0	-2	0	12	12	28	3
	delta	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	-1	0	11	11	14	24
	epsilon	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-0,5	0	-1	0	10,5	11	11	26
	zeta	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-2	0	-1	0	12	11	20	5
	eta	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	-3	0	11	13	30	0
	theta	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-0,5	0	-3	0	10,5	13	27	2
	iota	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-2	0	-3	0	12	13	36	-19

Tabulka T4.5: Ilustrativní úloha (I), krok (III).

V tabulce číslo tři je již možné hovořit o přípustném řešení. Pomocné proměnné se nenachází v bázi, pravé strany rovnic jsou kladné – řešení je přípustné. Jelikož se jedná o přípustné řešení, můžeme také geometricky identifikovat reálnou polohu tohoto řešení v prostoru řešení. Dle hodnot rozhodovacích proměnných x_1 a x_2 leží stávající řešení v bodě [6,8]. Čtenář snadno určí geometrickou polohu tohoto bodu snadno ze schématu 4.8. Hodnota účelové funkce v tomto bodě je $Z(x) = x_1 + 2x_2 = 22$. Tuto hodnotu není nutné dopočítávat ručně, ale nalezneme jí ve sloupci vpravo dole, v řádku vícerozměrného intervalu alfa, v němž se právě toto řešení pozičně nalézá. Kompletní ilustrace postupu prostorem přípustných řešení je zobrazena až po nalezení optimálního řešení úlohy na obrázku 4.9. Na tomto přípustném bazickém řešení bude i mimořádně představena interpretace hodnot všech proměnných pro čtenářovu budoucí orientaci v postupu řešení.

Proměnná	Hodnota	Interpretace
x_1	6	Souřadnice bazického řešení na horizontální ose
x_2	8	Souřadnice bazického řešení na vertikální ose
r_{11}^-	4	Vzdálenost od dělicího bodu ²⁶ k_{11} zleva je 4 (tj. rozdíl hodnot 10 a 6)
r_{11}^+	0	Vzdálenost od dělicího bodu k_{11} zprava. Protože tento dělicí bod (hodnota 10) ještě nebyl překročen, vzdálenost je 0
r_{12}^-	14	Vzdálenost od dělicího bodu k_{12} zleva. K bodu $x_1 = 20$ je vzdálenost 14.
r_{12}^+	0	Bod k_{12} ještě nebyl překročen, vzdálenost od tohoto bodu zprava je 0
r_{21}^-	2	Vzdálenost od bodu $x_2 = 10$ zdola (tj. rozdíl mezi 10 a 8)
r_{21}^+	0	Vzdálenost od bodu $x_2 = 10$ shora. Tento bod ještě nebyl překročen, vzdálenost shora je 0
r_{22}^-	12	Vzdálenost od dělicího bodu k_{22} zdola (tj. rozdíl 20 a 8)
r_{22}^+	0	Vzdálenost od dělicího bodu k_{22} shora. Tento bod ještě nebyl překročen, proto je vzdálenost 0
d_1	0	Bod leží na první podmínce $x_1 \geq 6$. Podmínka je splněna jako rovnice
d_2	17	Hodnota zbývající ke splnění podmínky $x_1 \leq 23$, na níž aktuální bod neleží
d_3	0	Bod leží na třetí podmínce $x_2 \geq 8$. Podmínka je splněna jako rovnice
d_4	18	Hodnota zbývající ke splnění podmínky $x_2 \leq 26$, na níž aktuální bod neleží
p_1	0	Řešení je přípustné
p_2	0	Řešení je přípustné

Tabulka T4.6: Interpretace hodnot proměnných v řešení B^3 .

V bazickém řešení B^3 volíme jako klíčový sloupec proměnné d_1 a sloupec d_3 v tomto kroku uložíme do evidence nedominovaných řešení, která ještě nebyla prozkoumána.

²⁶ Vzdáleností od dělicího bodu rozumíme vzdálenost stávajícího bodu a průsečku normály, která prochází tímto bodem, s nadrovinou, jejíž obecná rovnice má jediný nenulový koeficient k_{jk} .

Báze	B^3
Proměnná	d_3

Tabulka T4.7: Evidence neprozkoumaných kandidátů (I/I).

Přejdeme k novému řešení B^4 (T4.8),

cB	x _B	x ₁	x ₂	r ₁₁ -	r ₁₁ +	r ₁₂ -	r ₁₂ +	r ₂₁ -	r ₂₁ +	r ₂₂ -	r ₂₂ +	d ₁	d ₂	d ₃	d ₄	p ₁	p ₂	b	Ω
	x ₁	1	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	10	-
	d ₂	0	0	-1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	13	13
	x ₂	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	1	8	-
	d ₄	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	-1	18	-
	d ₁	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	-1	0	4	-
	r ₁₂ -	0	0	-1	1	1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	10	10
	r ₂₁ -	0	0	0	0	0	0	1	-1	0	0	0	0	1	0	0	-1	2	-
	r ₂₂ -	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-1	0	0	1	0	0	-1	12	-
	alfa	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	-2	0	10	12	26	26
	beta	0	0	0,5	-0,5	0	0	0	0	0	0	0	0	-2	0	10	12	21	26
	gama	0	0	2	-2	0	0	0	0	0	0	0	0	-2	0	10	12	36	11
	delta	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	10	11	18	28
	epsilon	0	0	0,5	-0,5	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	10	11	13	28
	zeta	0	0	2	-2	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	10	11	28	13
	eta	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	-3	0	10	13	34	4
	theta	0	0	0,5	-0,5	0	0	0	0	0	0	0	0	-3	0	10	13	29	4
	iota	0	0	2	-2	0	0	0	0	0	0	0	0	-3	0	10	13	44	-11

Tabulka T4.8: Ilustrativní úloha (I), krok (IV).

S novým řešením dochází k přesunu z bodu [6,8] do bodu [10,8]. Hodnota účelové funkce je 26. Tato hodnota je označena v příslušném sloupci dvakrát, a to v intervalech *alfa* a *beta*. Bod [10,8] totiž leží na pomezí těchto dvou intervalů (neboli na dělicím bodu k_{11}) a skutečnou hodnotu účelové funkce v daném bodě lze vysvětlit pomocí obou vyjádření $Z(x) = x_1 + 2x_2$ a $Z(x) = 0,5x_1 + 2x_2 + 5$. Zařadíme do báze proměnnou r_{11}^+ a do evidence opět zařadíme proměnnou d_3 .

Báze	B^3	B^4
Proměnná	d_3	d_3

Tabulka T4.9: Evidence neprozkoumaných kandidátů (I/II).

Přejdeme k bazickému řešení B^5 (T4.10).

cB	xB	x1	x2	r11-	r11+	r12-	r12+	r21-	r21+	r22-	r22+	d1	d2	d3	d4	p1	p2	b	Ω
	x1	1	0	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	20	-
	d2	0	0	0	0	-1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	3	3
	x2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	1	8	-
	d4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	-1	18	-
	d1	0	0	0	0	1	-1	0	0	0	0	1	0	0	0	-1	0	14	-
	r11+	0	0	-1	1	1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	10	-
	r21-	0	0	0	0	0	0	1	-1	0	0	0	0	1	0	0	-1	2	-
	r22-	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-1	0	0	1	0	0	-1	12	-
	alfa	0	0	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	-2	0	10	12	36	36
	beta	0	0	0	0	0,5	-0,5	0	0	0	0	0	0	-2	0	10	12	26	31
	gama	0	0	0	0	2	-2	0	0	0	0	0	0	-2	0	10	12	56	31
	delta	0	0	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	-1	0	10	11	28	38
	epsilon	0	0	0	0	0,5	-0,5	0	0	0	0	0	0	-1	0	10	11	18	33
	zeta	0	0	0	0	2	-2	0	0	0	0	0	0	-1	0	10	11	48	33
	eta	0	0	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	-3	0	10	13	44	14
	theta	0	0	0	0	0,5	-0,5	0	0	0	0	0	0	-3	0	10	13	34	9
	iota	0	0	0	0	2	-2	0	0	0	0	0	0	-3	0	10	13	64	9

Tabulka T4.10: Ilustrativní úloha (I), krok (V).

Byl realizován přesun z bodu [10,8] do bodu [20,8]. Zařadíme do báze proměnnou r_{12}^+ a opět zaevidujeme proměnnou d_3 jako potenciální směr prohledávání prostoru přípustných řešení.

Báze	B^3	B^4	B^5
Proměnná	d_3	d_3	d_3

Tabulka T4.11: Evidence neprozkoumaných kandidátů (I/III).

Další iterace jsou předloženy bez extenzivních komentářů. Přejít k řešení B^6 (T4.12).

cB	xB	x1	x2	r11-	r11+	r12-	r12+	r21-	r21+	r22-	r22+	d1	d2	d3	d4	p1	p2	b	Ω
	x1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	23	-
	r12+	0	0	0	0	-1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	3	-
	x2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	1	8	-
	d4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	-1	18	18
	d1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	-1	0	17	-
	r11+	0	0	-1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	13	-
	r21-	0	0	0	0	0	0	1	-1	0	0	0	0	1	0	0	-1	2	2
	r22-	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-1	0	0	1	0	0	-1	12	12
	alfa	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-2	0	10	12	39	39
	beta	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,5	-2	0	10	12	27,5	32,5
	gama	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	-2	0	10	12	62	37
	delta	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-1	0	10	11	31	41
	epsilon	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,5	-1	0	10	11	19,5	34,5
	zeta	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	-1	0	10	11	54	39
	eta	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-3	0	10	13	47	17
	theta	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,5	-3	0	10	13	35,5	10,5
	iota	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	-3	0	10	13	70	15

Tabulka T4.12: Ilustrativní úloha (I), krok (VI).

V bazickém řešení B^6 je již volba vstupní proměnné jednoznačná, proto tabulka evidence neprozkoumaných kandidátů - nedominovaných řešení není rozšířena. Následuje přechod k řešení B^7 (T4.13).

cB	xB	x1	x2	r11-	r11+	r12-	r12+	r21-	r21+	r22-	r22+	d1	d2	d3	d4	p1	p2	b	Ω
	x1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	23	-
	r12+	0	0	0	0	-1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	3	-
	x2	0	1	0	0	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	10	-
	d4	0	0	0	0	0	0	-1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	16	16
	d1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	-1	0	17	-
	r11+	0	0	-1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	13	-
	d3	0	0	0	0	0	0	1	-1	0	0	0	0	1	0	0	-1	2	-
	r22-	0	0	0	0	0	0	-1	1	1	-1	0	0	0	0	0	0	10	10
	alfa	0	0	0	0	0	0	2	-2	0	0	0	1	0	0	10	10	43	43
	beta	0	0	0	0	0	0	2	-2	0	0	0	0,5	0	0	10	10	31,5	36,5
	gama	0	0	0	0	0	0	2	-2	0	0	0	2	0	0	10	10	66	41
	delta	0	0	0	0	0	0	1	-1	0	0	0	1	0	0	10	10	33	43
	epsilon	0	0	0	0	0	0	1	-1	0	0	0	0,5	0	0	10	10	21,5	36,5
	zeta	0	0	0	0	0	0	1	-1	0	0	0	2	0	0	10	10	56	41
	eta	0	0	0	0	0	0	3	-3	0	0	0	1	0	0	10	10	53	23
	theta	0	0	0	0	0	0	3	-3	0	0	0	0,5	0	0	10	10	41,5	16,5
	iota	0	0	0	0	0	0	3	-3	0	0	0	2	0	0	10	10	76	21

Tabulka T4.13: Ilustrativní úloha (I), krok (VII).

Následuje přechod z B^7 do B^8 (T4.14).

cB	xB	x1	x2	r11-	r11+	r12-	r12+	r21-	r21+	r22-	r22+	d1	d2	d3	d4	p1	p2	b	Ω
	x1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	23	-
	r12+	0	0	0	0	-1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	3	-
	x2	0	1	0	0	0	0	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	20	-
	d4	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	1	0	0	0	1	0	0	6	6
	d1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	-1	0	17	-
	r11+	0	0	-1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	13	-
	d3	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-1	0	0	1	0	0	-1	12	-
	r21+	0	0	0	0	0	0	-1	1	1	-1	0	0	0	0	0	0	10	-
	alfa	0	0	0	0	0	0	0	0	2	-2	0	1	0	0	10	10	63	63
	beta	0	0	0	0	0	0	0	0	2	-2	0	0,5	0	0	10	10	51,5	56,5
	gama	0	0	0	0	0	0	0	0	2	-2	0	2	0	0	10	10	86	61
	delta	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-1	0	1	0	0	10	10	43	53
	epsilon	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-1	0	0,5	0	0	10	10	31,5	46,5
	zeta	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-1	0	2	0	0	10	10	66	51
	eta	0	0	0	0	0	0	0	0	3	-3	0	1	0	0	10	10	83	53
	theta	0	0	0	0	0	0	0	0	3	-3	0	0,5	0	0	10	10	71,5	46,5
	iota	0	0	0	0	0	0	0	0	3	-3	0	2	0	0	10	10	106	51

Tabulka T4.14: Ilustrativní úloha (I), krok (VIII).

A následuje poslední přesun z B^8 do B^9 (T4.15).

cB	xB	x1	x2	r11-	r11+	r12-	r12+	r21-	r21+	r22-	r22+	d1	d2	d3	d4	p1	p2	b	Ω
	x1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	23	-
	r12+	0	0	0	0	-1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	3	-
	x2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	26	-
	r22+	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	1	0	0	0	1	0	0	6	-
	d1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	-1	0	17	-
	r11+	0	0	-1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	13	-
	d3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	-1	18	-
	r21+	0	0	0	0	0	0	-1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	16	-
	alfa	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	2	10	10	75	75
	beta	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,5	0	2	10	10	63,5	68,5
	gama	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	2	10	10	98	73
	delta	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	10	10	49	59
	epsilon	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,5	0	1	10	10	37,5	52,5
	zeta	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	1	10	10	72	57
	eta	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	3	10	10	101	71
	theta	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,5	0	3	10	10	89,5	64,5
	iota	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	3	10	10	124	69

Tabulka T4.15: Ilustrativní úloha (I), optimální řešení.

Iterativním způsobem bylo nalezeno přípustné bazické řešení B^9 . Všechny stínové ceny ve všech vícerozměrných intervalech jsou nyní nezáporné. Nezápornost stínových cen je ve vícekritériálním simplexovém algoritmu kritériem optimality. Můžeme s jistotou prohlásit za optimální řešení bod [23,26] s hodnotou účelové funkce $Z(\mathbf{x}) = 69$. Nelze ovšem opomenout neprozkoumaná nedominovaná řešení, která jsme evidovali v průběhu algoritmu. Průchod všech možných cest prostorem přípustných řešení zde

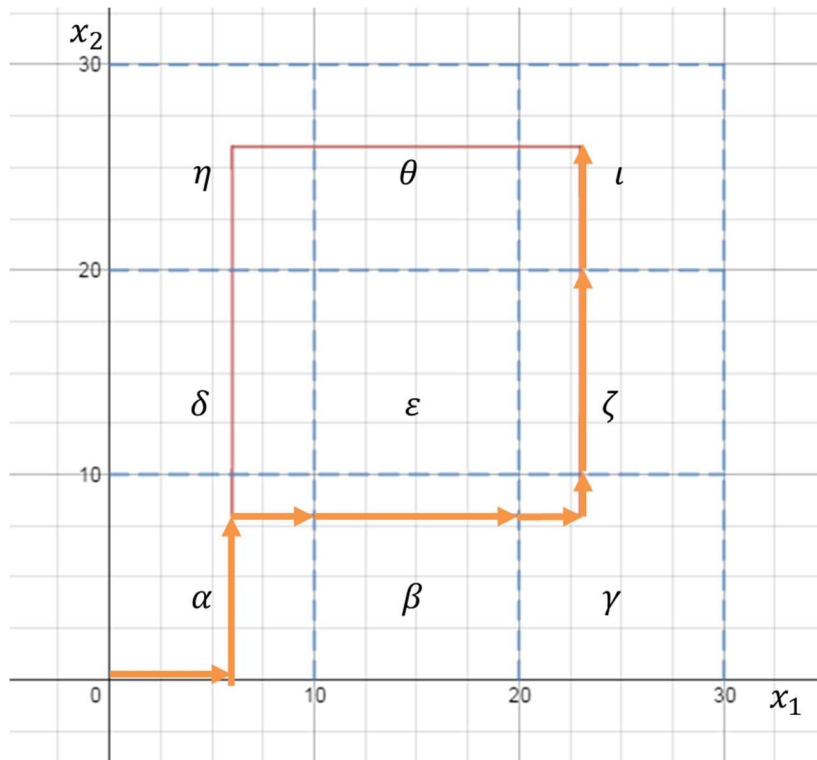
nebude uveden podrobně. Bude však popsán v následující diskuzi, kde bude ukázáno, jakým způsobem je možné interpretovat tento výsledek.

4.5.5 Diskuze o řešení ilustrativní úlohy (I)

Ilustrativní úloha (I) je specifická z hlediska monotonie dílčích po částech lineárních funkcí, které zde figurují. O obou funkcích $Z(x_1), Z(x_2)$ lze prohlásit, že jsou monotónní na celém svém definičním oboru, neboť pro obě tyto funkce platí některá z podmínek:

$$\begin{aligned}\forall x_j, x'_j \in D(Z): x_j < x'_j &\Rightarrow Z(x_j) < Z(x'_j) \\ \forall x_j, x'_j \in D(Z): x_j < x'_j &\Rightarrow Z(x_j) > Z(x'_j) \\ \forall x_j, x'_j \in D(Z): x_j < x'_j &\Rightarrow Z(x_j) \leq Z(x'_j) \\ \forall x_j, x'_j \in D(Z): x_j < x'_j &\Rightarrow Z(x_j) \geq Z(x'_j)\end{aligned}\tag{4-5-5}$$

Obě tyto funkce jsou rostoucí na celém svém definičním oboru. Tento fakt ve vícekritériálním simplexovém algoritmu zaručí, že každý další krok bude nutně nabývat lepší hodnoty alespoň jedné dílčí účelové funkce než předchozí. Kdybychom prozkoumali i ostatní nedominovaná řešení evidovaná v tabulce (T4.11), potom bychom jako finální bod opět našli bod [23,26]. Lze tedy tvrdit, že v případě monotónních dílčích po částech lineárních účelových funkcí je nalezené řešení vždy skutečně optimální. Volbou různých směrů při postupu prostorem přípustných řešení jde pouze o to, kterou cestou se k tomuto řešení dobereme. Problém pochopitelně spočívá v tom, že toto řešení nemusí být jediné a může existovat alternativní optimální řešení úlohy. Před vyřešením tohoto problému nejprve zobrazíme postup prostorem řešení podrobně popsány v jednotlivých krocích. Toto zobrazení bude doplněno i zobrazením alternativních postupů prostorem řešení. Na obrázku 4.10 je šipkami zobrazen směr postupu kroků prohledávání bází $B^1 - B^9$ v celkem osmi krocích.



Obrázek 4.10: Postup množinou přípustných řešení ilustrativní úlohy (I).

U demonstrovaného postupu se jedná o posloupnost hodnot účelové funkce ve vrcholech. Toto schéma odpovídá posloupnosti bodů $[0,0]$, $[6,0]$, $[6,8]$, $[10,8]$, $[20,8]$, $[23,8]$, $[23,10]$, $[23,20]$, $[23,26]$. Tato posloupnost odpovídá, a v případě monotónní funkce vždy bude odpovídat neklesajícím hodnotám účelové funkce. Na této úloze je možné dokázat, že existuje právě 19 dalších rostoucích posloupností, které vedou k témuž a také jedinému optimálnímu řešení. Celkem existuje 20 různých možností cest prostorem přípustných řešení k optimu. Toto tvrzení doplníme o upřesnění, že zmíněných 20 posloupností existuje počínaje prvním přípustným bazickým řešením (B^3). Pokud bychom jako počátek posloupnosti brali výchozí nepřípustné řešení úlohy, potom by těchto posloupností bylo celkem 40, neboť existují dva různé způsoby nalezení prvního přípustného bazického řešení. Tyto dva způsoby závisí na pořadí, v němž zařadíme do báze proměnné x_1 a x_2 v prvních dvou krocích algoritmu (T4.3) a (T4.4). Tyto dva různé způsoby lze ignorovat, neboť pokud existuje nějaké přípustné bazické řešení úlohy, které neleží v bodě $[0,0]$, potom je toto řešení nalezeno jakoukoli posloupností kroků, ve kterých vyřazujeme z báze pomocné proměnné.

V demonstrovaném postupu byla nalezena pouze 3 neprozkoumaná nedominovaná řešení. V evidenční tabulce ovšem nejsou přítomna všechna další z 19 možných

průchodů prostorem přípustných řešení. Další možnosti průchodu jsou totiž nalézány až během zkoumání těchto 3 neprozkoumaných řešení. Cesty prostorem přípustných řešení se tedy dále větví. Celkový možný počet průchodů prostorem přípustných řešení lze snadno vypočítat, neboť se v případě monotónních účelových funkcí jedná o souvislý orientovaný acyklický graf. Pro každý uzel (pro každého kandidáta na optimální řešení) můžeme určit počet všech možných vstupů, pro každý další uzel tyto počty sčítáme, až se dostaneme k uzlu s nejvyšší hodnotou účelové funkce.

Kdybychom se pokusili skutečně realizovat všech 19 zbývajících cest, zjistili bychom, že realizace není nutná ve všech případech. Důvodem je možnost evidence přípustných kanonických bází, v nichž jsme se v některé z iterací již ocitli, tak jak je to uvedeno v kapitole 3.2.3. Tímto způsobem bychom zjistili, že existují maximálně 2 možné postupy prostorem přípustných řešení (včetně ukázaného), jelikož bod optima má pouze dva sousední kandidáty na optimum, přes něž je možné jej dosáhnout.

Závěrem dodejme, že vzhledem k monotónnímu průběhu všech funkcí v modelu bude optimální a všechna alternativní optimální řešení ležet vždy „uvnitř“ či na hranici maximálního vícerozměrného intervalu²⁷, který má alespoň jeden společný bod s prostorem přípustných řešení. Pokud jsme schopni identifikovat, o který vícerozměrný interval se jedná, potom stačí tento interval identifikovat v modelu pomocí podmínek dělicích bodů a vyřešit jedinou sub-úlohu dle kapitoly 4.3.2 a uplatnit vícekriteriální simplexový algoritmus pouze na prostoru tohoto vícerozměrného intervalu. Tím bude zaručeno, že budou nalezena všechna existující optimální řešení úlohy.

4.5.6 Poznámky k minimalizační úloze

V případě úlohy minimalizační je způsob řešení analogický. Ukažme stručně na témže prostoru přípustných řešení optimalizační úlohu hledání minima. Řešení této úlohy je podstatně přímočařejší a jeho ilustrace vhodně doplní diskuzi o řešení v předchozím oddíle (4.5.5).

Je zadána úloha v kanonickém tvaru se stejnou sadou omezujících podmínek jako v úloze (4-5-1):

²⁷ Kde je dosahováno maximálních hodnot z hlediska součtu dílčích účelových funkcí platných pro daný vícerozměrný interval.

Minimalizujte $\mathbf{Z}(\mathbf{x}) = (Z_\alpha(\mathbf{x}) \dots Z_\iota(\mathbf{x}))^T$

za podmínek

$$x_1 - d_1 + p_1 = 6$$

$$x_1 + d_2 = 23$$

$$x_2 - d_3 + p_2 = 8$$

$$x_2 + d_4 = 26$$

$$x_1 + r_{11}^- - r_{11}^+ = 10$$

$$x_1 + r_{12}^- - r_{12}^+ = 20$$

$$x_2 + r_{21}^- - r_{21}^+ = 10$$

$$x_2 + r_{22}^- - r_{22}^+ = 20$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

(4-5-6)

kde

$$Z_\alpha(\mathbf{x}) = x_1 + 2x_2 + 10p_1 + 10p_2, \forall (x_1, x_2) \in \alpha$$

$$Z_\beta(\mathbf{x}) = 0,5x_1 + 2x_2 + 5 + 10p_1 + 10p_2, \forall (x_1, x_2) \in \beta$$

$$Z_\gamma(\mathbf{x}) = 2x_1 + 2x_2 - 25 + 10p_1 + 10p_2, \forall (x_1, x_2) \in \gamma$$

$$Z_\delta(\mathbf{x}) = x_1 + x_2 + 10 + 10p_1 + 10p_2, \forall (x_1, x_2) \in \delta$$

$$Z_\varepsilon(\mathbf{x}) = 0,5x_1 + x_2 + 15 + 10p_1 + 10p_2, \forall (x_1, x_2) \in \varepsilon$$

$$Z_\zeta(\mathbf{x}) = 2x_1 + x_2 - 15 + 10p_1 + 10p_2, \forall (x_1, x_2) \in \zeta$$

$$Z_\eta(\mathbf{x}) = x_1 + 3x_2 - 30 + 10p_1 + 10p_2, \forall (x_1, x_2) \in \eta$$

$$Z_\theta(\mathbf{x}) = 0,5x_1 + 3x_2 - 25 + 10p_1 + 10p_2, \forall (x_1, x_2) \in \theta$$

$$Z_\iota(\mathbf{x}) = 2x_1 + 3x_2 - 55 + 10p_1 + 10p_2, \forall (x_1, x_2) \in \iota$$

Koeficienty fragmentů souhrnné účelové funkce jsou zde totožné jako v maximalizační úloze. Jediným rozdílem je tedy směr optimalizace a s tím související cenové koeficienty pomocných proměnných p_1 a p_2 , které jsou nyní kladné. Model zapíšeme do výchozí simplexové tabulky (T4.16) a označíme toto řešení B^1 .

	alfa	1	2													10	10		
	beta	0,5	2													10	10		
	gama	2	2													10	10		
	delta	1	1													10	10		
	epsilon	0,5	1													10	10		
	zeta	2	1													10	10		
	eta	1	3													10	10		
	theta	0,5	3													10	10		
	iota	2	3													10	10		
cB	xB	x1	x2	r11-	r11+	r12-	r12+	r21-	r21+	r22-	r22+	d1	d2	d3	d4	p1	p2	b	Ω
10	p1	1										-1				1		6	6
0	d2	1											1					23	23
10	p2		1											-1			1	8	-
0	d4		1												1			25	-
0	r11-	1		1	-1													10	10
0	r12-	1				1	-1											20	20
0	r21-		1					1	-1									10	-
0	r22-		1							1	-1							20	-
	alfa	9	8	0	0	0	0	0	0	0	0	-10	0	-10	0	0	0	140	140
	beta	9,5	8	0	0	0	0	0	0	0	0	-10	0	-10	0	0	0	140	145
	gama	8	8	0	0	0	0	0	0	0	0	-10	0	-10	0	0	0	140	115
	delta	9	9	0	0	0	0	0	0	0	0	-10	0	-10	0	0	0	140	150
	epsilon	9,5	9	0	0	0	0	0	0	0	0	-10	0	-10	0	0	0	140	155
	zeta	8	9	0	0	0	0	0	0	0	0	-10	0	-10	0	0	0	140	125
	eta	9	7	0	0	0	0	0	0	0	0	-10	0	-10	0	0	0	140	110
	theta	9,5	7	0	0	0	0	0	0	0	0	-10	0	-10	0	0	0	140	115
	iota	8	7	0	0	0	0	0	0	0	0	-10	0	-10	0	0	0	140	85

Tabulka T4.16: Ilustrativní úloha (Ia), krok (I).

Ve výchozí tabulce (T4.16) řešení není přípustné z důvodu přítomnosti pomocných proměnných v bázi. Zvolíme dle již známých pravidel první sloupec jako klíčový a na základě toho též první řádek jako klíčový. Proměnnou p_1 střídá v bázi x_1 . Přejdeme do kroku B^2 (T4.17).

cB	xB	x1	x2	r11-	r11+	r12-	r12+	r21-	r21+	r22-	r22+	d1	d2	d3	d4	p1	p2	b	Ω
	x1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	1	0	6	-
	d2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	-1	0	17	-
	p2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	1	8	8
	d4	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	25	25
	r11-	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	-1	0	4	-
	r12-	0	0	0	0	1	-1	0	0	0	0	1	0	0	0	-1	0	14	-
	r21-	0	1	0	0	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	10	10
	r22-	0	1	0	0	0	0	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	20	20
	alfa	0	8	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	-10	0	-9	0	86	86
	beta	0	8	0	0	0	0	0	0	0	0	-0,5	0	-10	0	-9,5	0	83	88
	gama	0	8	0	0	0	0	0	0	0	0	-2	0	-10	0	-8	0	92	67
	delta	0	9	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	-10	0	-9	0	86	96
	epsilon	0	9	0	0	0	0	0	0	0	0	-0,5	0	-10	0	-9,5	0	83	98
	zeta	0	9	0	0	0	0	0	0	0	0	-2	0	-10	0	-8	0	92	77
	eta	0	7	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	-10	0	-9	0	86	56
	theta	0	7	0	0	0	0	0	0	0	0	-0,5	0	-10	0	-9,5	0	83	58
	iota	0	7	0	0	0	0	0	0	0	0	-2	0	-10	0	-8	0	92	37

Tabulka T4.17: Ilustrativní úloha (Ia), krok (II).

V tomto kroku (T4.17) řešení opět není přípustné. Jako jediný možný zvolíme sloupec proměnné x_2 jako klíčový a proměnná p_2 na základě hodnoty testu přípustnosti bázi opouští. Přejdeme k bazickému řešení B^3 (T4.18).

cB	xB	x1	x2	r11-	r11+	r12-	r12+	r21-	r21+	r22-	r22+	d1	d2	d3	d4	p1	p2	b	Ω
	x1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	1	0	6	
	d2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	-1	0	17	
	x2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	1	8	
	d4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	-1	17	
	r11-	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	-1	0	4	
	r12-	0	0	0	0	1	-1	0	0	0	0	1	0	0	0	-1	0	14	
	r21-	0	0	0	0	0	0	1	-1	0	0	0	0	1	0	0	-1	2	
	r22-	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-1	0	0	1	0	0	-1	12	
	alfa	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	-2	0	-9	-8	22	22
	beta	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-0,5	0	-2	0	-9,5	-8	19	24
	gama	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-2	0	-2	0	-8	-8	28	3
	delta	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	-1	0	-9	-9	14	24
	epsilon	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-0,5	0	-1	0	-9,5	-9	11	26
	zeta	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-2	0	-1	0	-8	-9	20	5
	eta	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	-3	0	-9	-7	30	0
	theta	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-0,5	0	-3	0	-9,5	-7	27	2
	iota	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-2	0	-3	0	-8	-7	36	-19

Tabulka T4.18: Ilustrativní úloha (Ia), krok (III).

Bazické řešení B^3 je řešením přípustným. Toto řešení leží v bodě $[6,8]$, tzn. ve vícerozměrném intervalu $alfa$. Hodnota účelové funkce je $Z(\mathbf{x}) = 22$. Zároveň je při pohledu na všechny stínové ceny tohoto bazického řešení jasné, že dle pravidel

vícekriteriálního simplexového algoritmu není možné vybrat žádný sloupec jako klíčový, který by vedl k nalezení dominujícího řešení. Nalezené řešení můžeme prohlásit za optimální.

Zde se projevuje možnost triviálního řešení úlohy nastíněná v diskuzi v oddíle (4.6.5). Bylo popsáno, že pokud lze identifikovat takový vícerozměrný interval, v němž je souhrnný růst (pokles) účelové funkce největší, potom lze celou úlohu omezit na sub-úlohu. Tuto úlohu potom řešíme vícekriteriálním simplexovým algoritmem pouze na zvoleném vícerozměrném intervalu. V tomto případě se jedná o vícerozměrný interval *alfa*.

4.6 Ilustrativní úloha hledání optimálního řešení (II) – Nemonotónní případ

V předchozí úloze (4-5-1) byl představen algoritmus vedoucí k nalezení jejího optimálního řešení. Tato úloha byla specifická z hlediska charakteru dílčích po částech lineárních účelových funkcí obou proměnných. Obě tyto účelové funkce byly **monotónní**. Jak je popsáno v diskuzi tohoto případu (4.5.5), v případě monotonicity účelových funkcí všech proměnných směřuje algoritmus k optimálnímu řešení jednoznačně, byť existuje více cest, kterými ho lze dosáhnout. Představíme nyní případ nemonotónních dílčích po částech lineárních funkcí. Jedná se o úlohu se stejnou sadou omezujících podmínek jako v úloze předchozí (4-5-1). Optimalizujeme úlohu

$$\text{Minimalizujte } Z(\mathbf{x}) = Z_1(x_1) + Z_2(x_2)$$

za podmínek

$$x_1 \geq 6$$

$$x_1 \leq 23$$

$$x_2 \geq 8$$

$$x_2 \leq 26$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

(4-6-1)

kde

$$Z_1(x_1) = x_1, x_1 \in \langle 0,10 \rangle$$

$$Z_1(x_1) = -0,5x_1 + 15, x_1 \in \langle 10,20 \rangle$$

$$Z_1(x_1) = 2x_1 - 35, x_1 \in \langle 20,30 \rangle$$

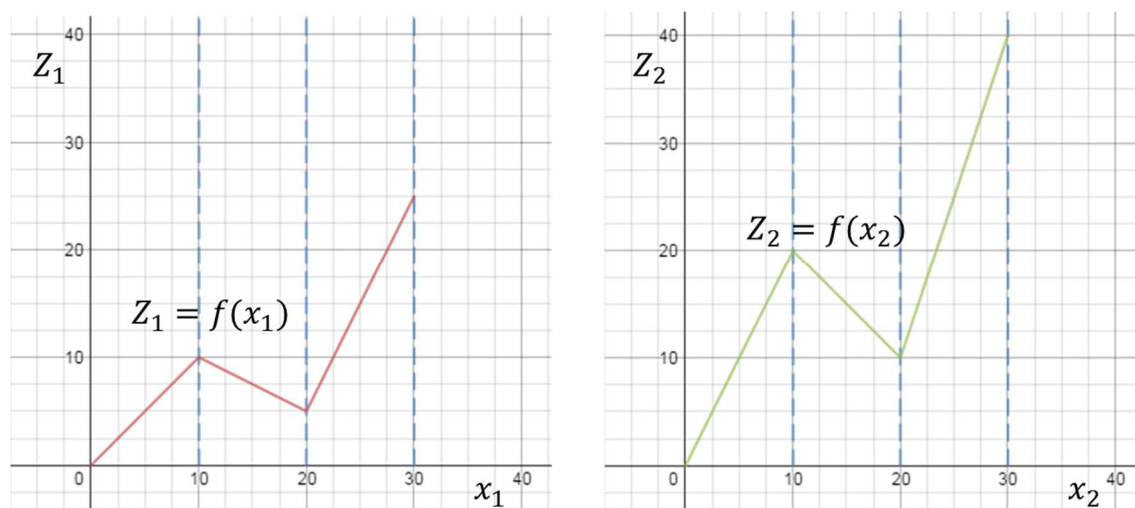
$$Z_2(x_2) = 2x_2, x_2 \in \langle 0,10 \rangle$$

$$Z_2(x_2) = -x_2 + 30, x_2 \in \langle 10,20 \rangle$$

$$Z_2(x_2) = 3x_2 - 50, x_2 \in \langle 20,30 \rangle$$

K řešení této úlohy budeme přistupovat stejným způsobem jako v úloze předchozí (4-5-1). Pro tentokrát bude úloha komentována stručněji, než v předchozím případě, na němž bylo třeba ilustrovat podrobný postup řešení. Protože je nyní čtenář s uvedeným postupem již dostatečně seznámen, řešení úlohy bude komentováno podrobně zejména tam, kde existují odlišnosti ve srovnání s úlohou (4-5-1).

Na obrázku 4.11 jsou zobrazeny průběhy obou dílčích po částech lineárních funkcí $Z_1(x_1)$ a $Z_2(x_2)$.



Obrázek 4.11: Průběh dílčích účelových funkcí $Z_1(x_1)$ a $Z_2(x_2)$, (vytvořeno v DGC).

V porovnání s případem (4-5-1) nemá ani jedna z dílčích účelových funkcí monotónní průběh. Je to dáno odlišným průběhem druhých (prostředních) lineárních segmentů u obou dílčích účelových funkcí. Jak bude vidět dále, tyto vlastnosti má významný dopad na složitost hledání optimálního řešení zadané úlohy (4-6-1). Zadaná úloha (4-6-1) má opět stejný prostor řešení jako úloha předchozí (4-5-1), a to díky totožným omezujícím podmínkám, ale také díky shodným dělicím bodům obou dílčích účelových funkcí. Proto je i množina všech kandidátů na optimální řešení totožná z množinou z úlohy

(4-5-1). Ilustrace množiny kandidátů na optimální řešení je uvedena u předchozí úlohy na obrázku 4.9.

S využitím tohoto schématu (4.9) lze opět identifikovat míru růstu účelových funkcí pro jednotlivé vícerozměrné intervaly:

$$\begin{aligned}
Z_\alpha(\mathbf{x}) &= x_1 + 2x_2, \forall (x_1, x_2) \in \alpha \\
Z_\beta(\mathbf{x}) &= -0,5x_1 + 2x_2 + 15, \forall (x_1, x_2) \in \beta \\
Z_\gamma(\mathbf{x}) &= 2x_1 + 2x_2 - 35, \forall (x_1, x_2) \in \gamma \\
Z_\delta(\mathbf{x}) &= x_1 - x_2 + 30, \forall (x_1, x_2) \in \delta \\
Z_\varepsilon(\mathbf{x}) &= -0,5x_1 - x_2 + 45, \forall (x_1, x_2) \in \varepsilon \\
Z_\zeta(\mathbf{x}) &= 2x_1 - x_2 - 5, \forall (x_1, x_2) \in \zeta \\
Z_\eta(\mathbf{x}) &= x_1 + 3x_2 - 50, \forall (x_1, x_2) \in \eta \\
Z_\theta(\mathbf{x}) &= -0,5x_1 + 3x_2 - 35, \forall (x_1, x_2) \in \theta \\
Z_\iota(\mathbf{x}) &= 2x_1 + 3x_2 - 85, \forall (x_1, x_2) \in \iota
\end{aligned} \tag{4-6-2}$$

Oproti předpisům účelových funkcí na jednotlivých vícerozměrných intervalech v minulé úloze (4-5-2) si lze všimnout, že v některých z nich se nyní vyskytují i záporné koeficienty. To je způsobeno tím, že v dílčích účelových funkcích existují segmenty se zápornou směrnici.

Dále model (4-6-1) převedeme do kanonického tvaru (4-6-3) obvyklým způsobem.

$$\begin{aligned}
&\text{minimalizujte } \mathbf{Z}(\mathbf{x}) = (Z_\alpha(\mathbf{x}) \dots Z_\iota(\mathbf{x}))^T \\
&\text{za podmínek} \\
&x_1 - d_1 + p_1 = 6 \\
&x_1 + d_2 = 23 \\
&x_2 - d_3 + p_2 = 8 \\
&x_2 + d_4 = 26 \\
&x_1 + r_{11}^- - r_{11}^+ = 10 \\
&x_1 + r_{12}^- - r_{12}^+ = 20 \\
&x_2 + r_{21}^- - r_{21}^+ = 10 \\
&x_2 + r_{22}^- - r_{22}^+ = 20 \\
&x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned} \tag{4-6-3}$$

kde

$$\begin{aligned}
Z_\alpha(\mathbf{x}) &= x_1 + 2x_2 + p_1 + p_2, \forall (x_1, x_2) \in \alpha \\
Z_\beta(\mathbf{x}) &= -0,5x_1 + 2x_2 + 15 + p_1 + p_2, \forall (x_1, x_2) \in \beta \\
Z_\gamma(\mathbf{x}) &= 2x_1 + 2x_2 - 35 + p_1 + p_2, \forall (x_1, x_2) \in \gamma \\
Z_\delta(\mathbf{x}) &= x_1 - x_2 + 30 + p_1 + p_2, \forall (x_1, x_2) \in \delta \\
Z_\varepsilon(\mathbf{x}) &= -0,5x_1 - x_2 + 45 + p_1 + p_2, \forall (x_1, x_2) \in \varepsilon \\
Z_\zeta(\mathbf{x}) &= 2x_1 - x_2 - 5 + p_1 + p_2, \forall (x_1, x_2) \in \zeta
\end{aligned}$$

$$Z_{\eta}(x) = x_1 + 3x_2 - 50 + p_1 + p_2, \forall (x_1, x_2) \in \eta$$

$$Z_{\theta}(x) = -0,5x_1 + 3x_2 - 35 + p_1 + p_2, \forall (x_1, x_2) \in \theta$$

$$Z_{\iota}(x) = 2x_1 + 3x_2 - 85 + p_1 + p_2, \forall (x_1, x_2) \in \iota$$

V porovnání s předchozí úlohou (4-5-3) je zde rozdíl v sazbách pomocných proměnných souhrnné účelové funkce. Ty jsou zde kladné, protože úloha je minimalizační.

Zapíšeme úlohu do modifikované simplexové tabulky (T4.19).

	alfa	1	2														10	10		
	beta	-0,5	2														10	10		
	gama	2	2														10	10		
	delta	1	-1														10	10		
	epsilon	-0,5	-1														10	10		
	zeta	2	-1														10	10		
	eta	1	3														10	10		
	theta	-0,5	3														10	10		
	iota	2	3														10	10		
cB	xB	x1	x2	r11-	r11+	r12-	r12+	r21-	r21+	r22-	r22+	d1	d2	d3	d4	p1	p2	b	Ω	
10	p1	1										-1				1		6	6	
0	d2	1											1					23	23	
10	p2		1											-1			1	8	-	
0	d4		1												1			25	-	
0	r11-	1		1	-1													10	10	
0	r12-	1				1	-1											20	20	
0	r21-		1					1	-1									10	-	
0	r22-		1							1	-1							20	-	
	alfa	9	8	0	0	0	0	0	0	0	0	-10	0	-10	0	0	0	140	140	
	beta	10,5	8	0	0	0	0	0	0	0	0	-10	0	-10	0	0	0	140	155	
	gama	8	8	0	0	0	0	0	0	0	0	-10	0	-10	0	0	0	140	105	
	delta	9	11	0	0	0	0	0	0	0	0	-10	0	-10	0	0	0	140	170	
	epsilon	10,5	11	0	0	0	0	0	0	0	0	-10	0	-10	0	0	0	140	185	
	zeta	8	11	0	0	0	0	0	0	0	0	-10	0	-10	0	0	0	140	135	
	eta	9	7	0	0	0	0	0	0	0	0	-10	0	-10	0	0	0	140	90	
	theta	10,5	7	0	0	0	0	0	0	0	0	-10	0	-10	0	0	0	140	105	
	iota	8	7	0	0	0	0	0	0	0	0	-10	0	-10	0	0	0	140	55	

Tabulka T4.19: Ilustrativní úloha (II), krok (I).

Algoritmus začíná typicky s nulovými hodnotami rozhodovacích proměnných, a tak řešení není z důvodu přítomnosti omezujících podmínek typu \geq přípustné. První kroky tedy zřejmě povedou k vyřazení pomocných proměnných z báze, jelikož díky schématu množiny přípustných řešení víme, že přípustné řešení úlohy existuje. Pro přesun k dalšímu bazickému řešení budeme vyhledávat sloupce, u nichž je alespoň jedna stínová cena kladná. V tomto kroku se jedná o sloupce proměnných x_1, x_2 a protože vzhledem k hodnotám jejich stínových cen jsou zjevně vzájemně nedominované, volíme

jako klíčový sloupec proměnné x_1 . Volba vstupní proměnné bude v případě více vzájemně nedominovaných možností opět určena lexikograficky jako první zleva.

Přejdeme k bazickému řešení B^2 (T4.20).

cB	xB	x1	x2	r11-	r11+	r12-	r12+	r21-	r21+	r22-	r22+	d1	d2	d3	d4	p1	p2	b	Ω
	x1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	1	0	6	-
	d2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	-1	0	17	-
	p2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	1	8	8
	d4	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	25	25
	r11-	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	-1	0	4	-
	r12-	0	0	0	0	1	-1	0	0	0	0	1	0	0	0	-1	0	14	-
	r21-	0	1	0	0	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	10	10
	r22-	0	1	0	0	0	0	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	20	20
	alfa	0	8	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	-10	0	-9	0	86	86
	beta	0	8	0	0	0	0	0	0	0	0	0,5	0	-10	0	-10,5	0	77	92
	gama	0	8	0	0	0	0	0	0	0	0	-2	0	-10	0	-8	0	92	57
	delta	0	11	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	-10	0	-9	0	86	116
	epsilon	0	11	0	0	0	0	0	0	0	0	0,5	0	-10	0	-10,5	0	77	122
	zeta	0	11	0	0	0	0	0	0	0	0	-2	0	-10	0	-8	0	92	87
	eta	0	7	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	-10	0	-9	0	86	36
	theta	0	7	0	0	0	0	0	0	0	0	0,5	0	-10	0	-10,5	0	77	42
	iota	0	7	0	0	0	0	0	0	0	0	-2	0	-10	0	-8	0	92	7

Tabulka T4.20: Ilustrativní úloha (II), krok (II).

Řešení (T4.20) stále není přípustné kvůli přítomnosti p_2 v bázi, proto i volba klíčového sloupce i řádku logicky směřuje k jejímu vyřazení. Všimněme si, že zde existuje ještě jedna perspektivní báze pro d_1 . Stínové ceny této proměnné nejsou všechny kladné, nicméně i přesto dle vícekriteriálního simplexového algoritmu z obrázku 3.2 považujeme tento sloupec za perspektivní. Perspektivitu pouze některých stínových cen lze zdůvodnit. Stínové ceny proměnné d_1 nabývají kladných hodnot pouze ve vícerozměrných intervalech $beta$, $epsilon$ a $theta$. Perspektivní hodnoty jsou dány tím, že dílčí po částech lineární funkce $Z_1(x_1)$ je v těchto intervalech klesající (jedná se o její prostřední segment). Přejdeme k bazickému řešení B^3 (T4.21).

cB	xB	x1	x2	r11-	r11+	r12-	r12+	r21-	r21+	r22-	r22+	d1	d2	d3	d4	p1	p2	b	Ω
	x1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	1	0	6	-
	d2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	-1	0	17	17
	x2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	1	8	-
	d4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	-1	17	-
	r11-	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	-1	0	4	4
	r12-	0	0	0	0	1	-1	0	0	0	0	1	0	0	0	-1	0	14	14
	r21-	0	0	0	0	0	0	1	-1	0	0	0	0	1	0	0	-1	2	-
	r22-	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-1	0	0	1	0	0	-1	12	-
	alfa	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	-2	0	-9	-8	22	22
	beta	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,5	0	-2	0	-10,5	-8	13	28
	gama	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-2	0	-2	0	-8	-8	28	-7
	delta	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	1	0	-9	-11	-2	28
	epsilon	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,5	0	1	0	-10,5	-11	-11	34
	zeta	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-2	0	1	0	-8	-11	4	-1
	eta	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	-3	0	-9	-7	30	-20
	theta	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,5	0	-3	0	-10,5	-7	21	-14
	iota	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-2	0	-3	0	-8	-7	36	-49

Tabulka T4.21: Ilustrativní úloha (II), krok (III).

Jedná se o první přípustné řešení úlohy s hodnotami rozhodovacích proměnných $x_1 = 6, x_2 = 8$. Geometricky leží souřadnice $[6,8]$ v intervalu *alfa* a reálná hodnota účelové funkce je 22. Tato hodnota je v příslušném sloupci vyznačena. Vybereme jako první zleva vstupující proměnnou d_1 . Od této chvíle (počínaje prvním přípustným řešením úlohy) je už třeba opět evidovat všechna možná nedominovaná řešení. Zapišeme:

Báze	B^3
Proměnná	d_3

Tabulka T4.22: Evidence neprozkoumaných kandidátů (II/I).

Přejdeme k řešení B^4 .

cB	xB	x1	x2	r11-	r11+	r12-	r12+	r21-	r21+	r22-	r22+	d1	d2	d3	d4	p1	p2	b	Ω
	x1	1	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	10	-
	d2	0	0	-1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	13	13
	x2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	1	8	-
	d4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	-1	17	-
	d1	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	-1	0	4	-
	r12-	0	0	-1	1	1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	10	10
	r21-	0	0	0	0	0	0	1	-1	0	0	0	0	1	0	0	-1	2	-
	r22-	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-1	0	0	1	0	0	-1	12	-
	alfa	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	-2	0	-10	-8	26	26
	beta	0	0	-0,5	0,5	0	0	0	0	0	0	0	0	-2	0	-10	-8	11	26
	gama	0	0	2	-2	0	0	0	0	0	0	0	0	-2	0	-10	-8	36	1
	delta	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	-10	-11	2	32
	epsilon	0	0	-0,5	0,5	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	-10	-11	-13	32
	zeta	0	0	2	-2	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	-10	-11	12	7
	eta	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	-3	0	-10	-7	34	-16
	theta	0	0	-0,5	0,5	0	0	0	0	0	0	0	0	-3	0	-10	-7	19	-16
	iota	0	0	2	-2	0	0	0	0	0	0	0	0	-3	0	-10	-7	44	-41

Tabulka T4.23: Ilustrativní úloha (II), krok (IV).

V tomto bazickém přípustném řešení (T4.23) došlo k přesunu do bodu [10,8] a hodnota účelové funkce je 26. Tato hodnota je ve sloupci reálných hodnot účelových funkcí vyznačena dvakrát, jelikož se tento bod nachází na hranici dvou sousedních vícerozměrných intervalů *alfa* a *beta*. Zde dochází na první pohled k paradoxnímu fenoménu, protože hodnota souhrnné účelové funkce vzrostla, přestože se jedná o minimalizační úlohu. Zde je vidět hlavní rozdíl mezi úlohou s monotónními dílčími účelovými funkcemi a úlohou s nemonotónními dílčími účelovými funkcemi. V případě nemonotónní úlohy se s každým krokem nemusí hodnota souhrnné účelové funkce nutně zlepšovat, protože další postup je veden ke zlepšení hodnoty jakékoliv dílčí účelové funkce rozšíření na celou množinu přípustných řešení. Zlepšení nebo zhoršení souhrnné účelové funkce tak může nastat v kterémkoliv kroku algoritmu.

Další poznámka směřuje k volbě klíčového sloupce. V tabulce (T4.23) tentokrát nebyl vybrán první sloupec zleva, neboť zařazením proměnné r_{11}^- do báze bychom se vrátili o krok zpět. Tato proměnná byla v minulém kroku (T4.21) vyřazena. Sloupce s proměnnými, jejichž zařazení by vedlo k návratu o krok zpět, budeme označovat tmavší barvou. Jako klíčový zvolíme sloupec r_{11}^+ a klíčový řádek r_{12}^- . Zaevidujeme perspektivní cesty (T4.24):

Báze	B^3	B^4
Proměnná	d_3	d_3

Tabulka T4.24: Evidence neprozkoumaných kandidátů (II/II).

Přejdeme k řešení B^5 (T4.25).

cB	xB	x1	x2	r11-	r11+	r12-	r12+	r21-	r21+	r22-	r22+	d1	d2	d3	d4	p1	p2	b	Ω
	x1	1	0	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	20	-
	d2	0	0	0	0	-1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	3	3
	x2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	1	8	-
	d4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	-1	17	-
	d1	0	0	0	0	1	-1	0	0	0	0	1	0	0	0	-1	0	14	-
	r11+	0	0	-1	1	1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	10	-10
	r21-	0	0	0	0	0	0	1	-1	0	0	0	0	1	0	0	-1	2	-
	r22-	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-1	0	0	1	0	0	-1	12	-
	alfa	0	0	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	-2	0	-10	-8	36	36
	beta	0	0	0	0	-0,5	0,5	0	0	0	0	0	0	-2	0	-10	-8	6	21
	gama	0	0	0	0	2	-2	0	0	0	0	0	0	-2	0	-10	-8	56	21
	delta	0	0	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	1	0	-10	-11	12	42
	epsilon	0	0	0	0	-0,5	0,5	0	0	0	0	0	0	1	0	-10	-11	-18	27
	zeta	0	0	0	0	2	-2	0	0	0	0	0	0	1	0	-10	-11	32	27
	eta	0	0	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	-3	0	-10	-7	44	-6
	theta	0	0	0	0	-0,5	0,5	0	0	0	0	0	0	-3	0	-10	-7	14	-21
	iota	0	0	0	0	2	-2	0	0	0	0	0	0	-3	0	-10	-7	64	-21

Tabulka T4.25: Ilustrativní úloha (II), krok (V).

Bod [20,8], hodnota účelové funkce na hranici intervalů $beta$ a $gama$ je 21. Zařadíme proměnnou r_{12}^+ a rozšíříme evidenci v tabulce (T4.26).

Báze	B^3	B^4	B^5
Proměnná	d_3	d_3	d_3

Tabulka T4.26: Evidence neprozkoumaných kandidátů (II/III).

V evidenci neprozkoumaných nedominovaných řešení se opakovaně objevuje zařazení proměnné d_3 . Tyto možnosti ale nejsou rovnocenné. Zařazení proměnné d_3 v různých krocích algoritmu mají společná pouze to, že v následujícím kroku by řešení již neleželo na třetí omezující podmínce (degeneraci řešení nyní neuvažujeme). V jednotlivých případech by došlo pokaždé k přesunu do odlišného bodu, proto je třeba evidovat možnost zařazení téže proměnné pro různé báze.

Přejdeme k řešení B^6 (T4.27).

cB	xB	x1	x2	r11-	r11+	r12-	r12+	r21-	r21+	r22-	r22+	d1	d2	d3	d4	p1	p2	b	Ω
	x1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	23	-
	r12+	0	0	0	0	-1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	3	-
	x2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	1	8	-
	d4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	-1	17	17
	d1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	-1	0	17	-
	r11+	0	0	-1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	13	-
	r21-	0	0	0	0	0	0	1	-1	0	0	0	0	1	0	0	-1	2	2
	r22-	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-1	0	0	1	0	0	-1	12	12
	alfa	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-2	0	-10	-8	39	39
	beta	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-0,5	-2	0	-10	-8	4,5	20
	gama	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	-2	0	-10	-8	62	27
	delta	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	-10	-11	15	45
	epsilon	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-0,5	1	0	-10	-11	-19,5	26
	zeta	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	1	0	-10	-11	38	33
	eta	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-3	0	-10	-7	47	-3
	theta	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-0,5	-3	0	-10	-7	12,5	-23
	iota	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	-3	0	-10	-7	70	-15

Tabulka T4.27: Ilustrativní úloha (II), krok (VI).

V bazickém řešení B^6 existuje pouze jediná možnost zařazení proměnné do báze (nepočítáme-li návrat zpět). Pokud bychom nahlédli do schématu prostoru přípustných řešení, zjistili bychom, že z bodu [23,8] existují skutečně jen dvě cesty. Hodnota účelové funkce je 27. Evidenci neprozkoumaných řešení není třeba rozšiřovat. Přejdeme k řešení B^7 .

cB	xB	x1	x2	r11-	r11+	r12-	r12+	r21-	r21+	r22-	r22+	d1	d2	d3	d4	p1	p2	b	Ω
	x1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	23	-
	r12+	0	0	0	0	-1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	3	-
	x2	0	1	0	0	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	10	-
	d4	0	0	0	0	0	0	-1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	15	15
	d1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	-1	0	17	-
	r11+	0	0	-1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	13	-
	d3	0	0	0	0	0	0	1	-1	0	0	0	0	1	0	0	-1	2	-
	r22-	0	0	0	0	0	0	-1	1	1	-1	0	0	0	0	0	0	10	10
	alfa	0	0	0	0	0	0	2	-2	0	0	0	1	0	0	-10	-10	43	43
	beta	0	0	0	0	0	0	2	-2	0	0	0	-0,5	0	0	-10	-10	8,5	24
	gama	0	0	0	0	0	0	2	-2	0	0	0	2	0	0	-10	-10	66	31
	delta	0	0	0	0	0	0	-1	1	0	0	0	1	0	0	-10	-10	13	43
	epsilon	0	0	0	0	0	0	-1	1	0	0	0	-0,5	0	0	-10	-10	-21,5	24
	zeta	0	0	0	0	0	0	-1	1	0	0	0	2	0	0	-10	-10	36	31
	eta	0	0	0	0	0	0	3	-3	0	0	0	1	0	0	-10	-10	53	3
	theta	0	0	0	0	0	0	3	-3	0	0	0	-0,5	0	0	-10	-10	18,5	-17
	iota	0	0	0	0	0	0	3	-3	0	0	0	2	0	0	-10	-10	76	-9

Tabulka T4.28: Ilustrativní úloha (II), krok (VII).

Řešení B^7 se nachází v bodě [23,10], hodnota účelové funkce je 31. Evidence se rozšíří o jednu položku:

Báze	B^3	B^4	B^5	B^7
Proměnná	d_3	d_3	d_3	d_2

Tabulka T4.29: Evidence neprozkoumaných kandidátů (II/IV).

Zařadíme r_{21}^+ a přejdeme k řešení B^8 (T4.30).

cB	xB	x1	x2	r11-	r11+	r12-	r12+	r21-	r21+	r22-	r22+	d1	d2	d3	d4	p1	p2	b	Ω
	x1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	23	-
	r12+	0	0	0	0	-1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	3	-
	x2	0	1	0	0	0	0	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	20	-
	d4	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	1	0	0	0	1	0	0	5	5
	d1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	-1	0	17	-
	r11+	0	0	-1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	13	-
	d3	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-1	0	0	1	0	0	-1	12	-
	r21+	0	0	0	0	0	0	-1	1	1	-1	0	0	0	0	0	0	10	-
	alfa	0	0	0	0	0	0	0	0	2	-2	0	1	0	0	-10	-10	63	63
	beta	0	0	0	0	0	0	0	0	2	-2	0	-0,5	0	0	-10	-10	28,5	44
	gama	0	0	0	0	0	0	0	0	2	-2	0	2	0	0	-10	-10	86	51
	delta	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	1	0	1	0	0	-10	-10	3	33
	epsilon	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	1	0	-0,5	0	0	-10	-10	-31,5	14
	zeta	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	1	0	2	0	0	-10	-10	26	21
	eta	0	0	0	0	0	0	0	0	3	-3	0	1	0	0	-10	-10	83	33
	theta	0	0	0	0	0	0	0	0	3	-3	0	-0,5	0	0	-10	-10	48,5	14
	iota	0	0	0	0	0	0	0	0	3	-3	0	2	0	0	-10	-10	106	21

Tabulka T4.30: Ilustrativní úloha (II), krok (VIII).

Řešení B^8 se nachází v bodě [23,20], hodnota souhrnné účelové funkce je 21.

Rozšíříme evidenci:

Báze	B^3	B^4	B^5	B^7	B^8
Proměnná	d_3	d_3	d_3	d_2	d_2

Tabulka T4.31: Evidence neprozkoumaných kandidátů (II/V).

A postoupíme k řešení B^9 (T4.32) zařazením proměnné r_{22}^+ .

cB	xB	x1	x2	r11-	r11+	r12-	r12+	r21-	r21+	r22-	r22+	d1	d2	d3	d4	p1	p2	b	Ω
	x1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	23	23
	r12+	0	0	0	0	-1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	3	3
	x2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	25	-
	r22+	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	1	0	0	0	1	0	0	5	-
	d1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	-1	0	17	17
	r11+	0	0	-1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	13	13
	d3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	-1	17	-
	r21+	0	0	0	0	0	0	-1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	15	-
	alfa	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	2	-10	-10	73	73
	beta	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-0,5	0	2	-10	-10	38,5	54
	gama	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	2	-10	-10	96	61
	delta	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	-1	-10	-10	-2	28
	epsilon	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-0,5	0	-1	-10	-10	-36,5	8,5
	zeta	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	-1	-10	-10	21	16
	eta	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	3	-10	-10	98	48
	theta	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-0,5	0	3	-10	-10	63,5	29
	iota	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	3	-10	-10	121	36

Tabulka T4.32: Ilustrativní úloha (II), krok (IX).

Bazické řešení B^9 se nachází v bodě [23,25] a hodnota účelové funkce je 36. Toto bazické řešení je od počátku soustavy souřadnic nejvzdálenější. Tuto skutečnost uvádíme pro zajímavost. U minimalizační úlohy bychom obecně spíše očekávali, že se do bodu, kde proměnné nabývají nejvyšších možných hodnot na prostoru přípustných řešení, nedostaneme. Zde je patrné úskalí úloh s nemonotónními dílčími účelovými funkcemi. Kvůli různorodému charakteru směrnic lineárních segmentů na jednotlivých vícerozměrných intervalech se může optimální řešení nacházet prakticky kdekoliv v prostoru přípustných řešení. V řešení pokračujeme zařazením proměnné d_2 a přejdeme k bazickému řešení B^{10} (T4.33). Následující kroky jsou uváděny bez komentářů.

cB	xB	x1	x2	r11-	r11+	r12-	r12+	r21-	r21+	r22-	r22+	d1	d2	d3	d4	p1	p2	b	Ω
	x1	1	0	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	20	20
	d2	0	0	0	0	-1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	3	-
	x2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	25	-
	r22+	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	1	0	0	0	1	0	0	5	-
	d1	0	0	0	0	1	-1	0	0	0	0	1	0	0	0	-1	0	14	14
	r11+	0	0	-1	1	1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	10	10
	d3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	-1	17	-
	r21+	0	0	0	0	0	0	-1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	15	-
	alfa	0	0	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	0	2	-10	-10	70	70
	beta	0	0	0	0	-0,5	0,5	0	0	0	0	0	0	0	2	-10	-10	40	55
	gama	0	0	0	0	2	-2	0	0	0	0	0	0	0	2	-10	-10	90	55
	delta	0	0	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	-1	-10	-10	-5	25	
	epsilon	0	0	0	0	-0,5	0,5	0	0	0	0	0	0	-1	-10	-10	-35	10	
	zeta	0	0	0	0	2	-2	0	0	0	0	0	0	-1	-10	-10	15	10	
	eta	0	0	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	3	-10	-10	95	45	
	theta	0	0	0	0	-0,5	0,5	0	0	0	0	0	0	3	-10	-10	65	30	
	iota	0	0	0	0	2	-2	0	0	0	0	0	0	3	-10	-10	115	30	

Tabulka T4.33: Ilustrativní úloha (II), krok (X).

Báze	B^3	B^4	B^5	B^7	B^8	B^{10}
Proměnná	d_3	d_3	d_3	d_2	d_2	d_4

Tabulka T4.34: Evidence neprozkoumaných kandidátů (II/VI).

cB	xB	x1	x2	r11-	r11+	r12-	r12+	r21-	r21+	r22-	r22+	d1	d2	d3	d4	p1	p2	b	Ω
	x1	1	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	10	10
	d2	0	0	-1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	13	-
	x2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	25	-
	r22+	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	1	0	0	0	1	0	0	5	-
	d1	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	-1	0	4	4
	r12-	0	0	-1	1	1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	10	-
	d3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	-1	17	-
	r21+	0	0	0	0	0	0	-1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	15	-
	alfa	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	-10	-10	60	60
	beta	0	0	-0,5	0,5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	-10	-10	45	60
	gama	0	0	2	-2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	-10	-10	70	35
	delta	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	-10	-10	-15	15	
	epsilon	0	0	-0,5	0,5	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	-10	-10	-30	15	
	zeta	0	0	2	-2	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	-10	-10	-5	-10	
	eta	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	3	-10	-10	85	35	
	theta	0	0	-0,5	0,5	0	0	0	0	0	0	0	0	3	-10	-10	70	35	
	iota	0	0	2	-2	0	0	0	0	0	0	0	0	3	-10	-10	95	10	

Tabulka T4.35: Ilustrativní úloha (II), krok (XI).

Báze	B^3	B^4	B^5	B^7	B^8	B^{10}	B^{11}
Proměnná	d_3	d_3	d_3	d_2	d_2	d_4	d_4

Tabulka T4.36: Evidence neprozkoumaných kandidátů (II/VII).

cB	xB	x1	x2	r11-	r11+	r12-	r12+	r21-	r21+	r22-	r22+	d1	d2	d3	d4	p1	p2	b	Ω
	x1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	1	0	6	-
	d2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	-1	0	17	-
	x2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	25	25
	r22+	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	1	0	0	0	1	0	0	5	5
	r11-	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	-1	0	4	-
	r12-	0	0	0	0	1	-1	0	0	0	0	1	0	0	0	-1	0	14	-
	d3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	-1	17	17
	r21+	0	0	0	0	0	0	-1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	15	15
	alfa	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	2	-9	-10	56	56
	beta	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,5	0	0	2	-10,5	-10	47	62
	gama	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-2	0	0	2	-8	-10	62	27
	delta	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	-1	-9	-10	-19	11
	epsilon	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,5	0	0	-1	-10,5	-10	-28	17
	zeta	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-2	0	0	-1	-8	-10	-13	-18
	eta	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	3	-9	-10	81	31
	theta	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,5	0	0	3	-10,5	-10	72	37
	iota	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-2	0	0	3	-8	-10	87	2

Tabulka T4.37: Ilustrativní úloha (II), krok (XII).

cB	xB	x1	x2	r11-	r11+	r12-	r12+	r21-	r21+	r22-	r22+	d1	d2	d3	d4	p1	p2	b	Ω
	x1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	1	0	6	-
	d2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	-1	0	17	-
	x2	0	1	0	0	0	0	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	20	20
	d4	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	1	0	0	0	1	0	0	5	-
	r11-	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	-1	0	4	-
	r12-	0	0	0	0	1	-1	0	0	0	0	1	0	0	0	-1	0	14	-
	d3	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-1	0	0	1	0	0	-1	12	12
	r21+	0	0	0	0	0	0	-1	1	1	-1	0	0	0	0	0	0	10	10
	alfa	0	0	0	0	0	0	0	0	2	-2	-1	0	0	0	-9	-10	46	46
	beta	0	0	0	0	0	0	0	0	2	-2	0,5	0	0	0	-10,5	-10	37	52
	gama	0	0	0	0	0	0	0	0	2	-2	-2	0	0	0	-8	-10	52	17
	delta	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	1	-1	0	0	0	-9	-10	-14	16
	epsilon	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	1	0,5	0	0	0	-10,5	-10	-23	22
	zeta	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	1	-2	0	0	0	-8	-10	-8	-13
	eta	0	0	0	0	0	0	0	0	3	-3	-1	0	0	0	-9	-10	66	16
	theta	0	0	0	0	0	0	0	0	3	-3	0,5	0	0	0	-10,5	-10	57	22
	iota	0	0	0	0	0	0	0	0	3	-3	-2	0	0	0	-8	-10	72	-13

Tabulka T4.38: Ilustrativní úloha (II), krok (XIII).

Báze	B^3	B^4	B^5	B^7	B^8	B^{10}	B^{11}	B^{13}
Proměnná	d_3	d_3	d_3	d_2	d_2	d_4	d_4	d_1

Tabulka T4.39: Evidence neprozkoumaných kandidátů (II/VIII).

cB	xB	x1	x2	r11-	r11+	r12-	r12+	r21-	r21+	r22-	r22+	d1	d2	d3	d4	p1	p2	b	Ω
	x1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	1	0	6	-
	d2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	-1	0	17	-
	x2	0	1	0	0	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	10	10
	d4	0	0	0	0	0	0	-1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	15	-
	r11-	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	-1	0	4	-
	r12-	0	0	0	0	1	-1	0	0	0	0	1	0	0	0	-1	0	14	-
	d3	0	0	0	0	0	0	1	-1	0	0	0	0	1	0	0	-1	2	2
	r22-	0	0	0	0	0	0	-1	1	1	-1	0	0	0	0	0	0	10	-
	alfa	0	0	0	0	0	0	2	-2	0	0	-1	0	0	0	-9	-10	26	26
	beta	0	0	0	0	0	0	2	-2	0	0	0,5	0	0	0	-10,5	-10	17	32
	gama	0	0	0	0	0	0	2	-2	0	0	-2	0	0	0	-8	-10	32	-3
	delta	0	0	0	0	0	0	-1	1	0	0	-1	0	0	0	-9	-10	-4	26
	epsilon	0	0	0	0	0	0	-1	1	0	0	0,5	0	0	0	-10,5	-10	-13	32
	zeta	0	0	0	0	0	0	-1	1	0	0	-2	0	0	0	-8	-10	2	-3
	eta	0	0	0	0	0	0	3	-3	0	0	-1	0	0	0	-9	-10	36	-14
	theta	0	0	0	0	0	0	3	-3	0	0	0,5	0	0	0	-10,5	-10	27	-8
	iota	0	0	0	0	0	0	3	-3	0	0	-2	0	0	0	-8	-10	42	-43

Tabulka T4.40: Ilustrativní úloha (II), krok (XIV).

Báze	B^3	B^4	B^5	B^7	B^8	B^{10}	B^{11}	B^{13}	B^{14}
Proměnná	d_3	d_3	d_3	d_2	d_2	d_4	d_4	d_1	d_1

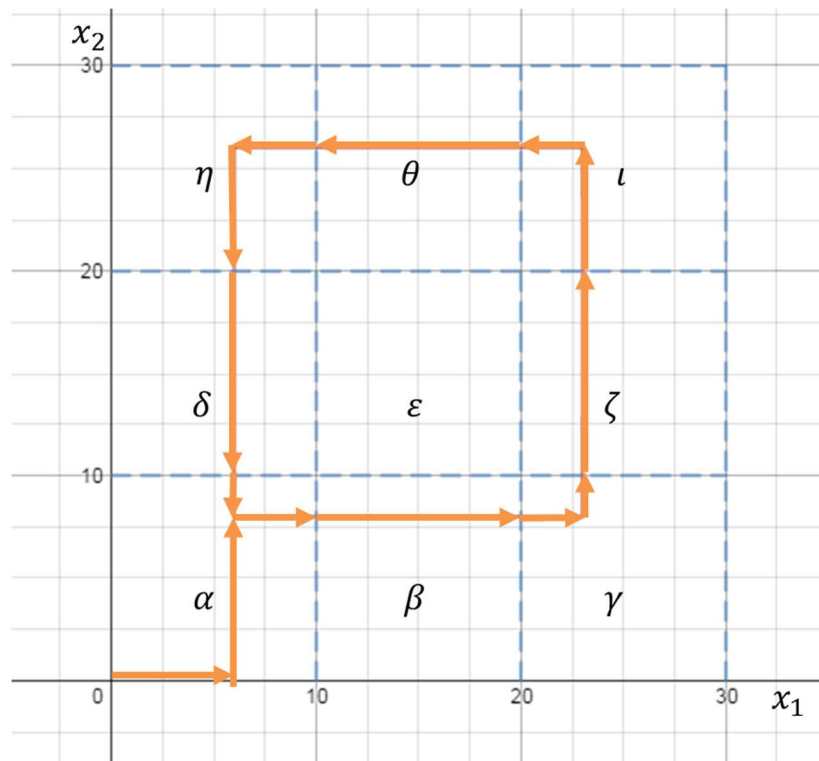
Tabulka T4.41: Evidence neprozkoumaných kandidátů (II/IX).

cB	xB	x1	x2	r11-	r11+	r12-	r12+	r21-	r21+	r22-	r22+	d1	d2	d3	d4	p1	p2	b	Ω
	x1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	1	0	6	
	d2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	-1	0	17	
	x2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	1	8	
	d4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	-1	17	
	r11-	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	-1	0	4	
	r12-	0	0	0	0	1	-1	0	0	0	0	1	0	0	0	-1	0	14	
	d3	0	0	0	0	0	0	1	-1	0	0	0	0	1	0	0	-1	2	
	r22-	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-1	0	0	1	0	0	-1	12	
	alfa	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	-2	0	-9	-8	22	
	beta	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,5	0	-2	0	-10,5	-8	13	
	gama	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-2	0	-2	0	-8	-8	28	
	delta	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	1	0	-9	-11	-2	
	epsilon	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,5	0	1	0	-10,5	-11	-11	
	zeta	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-2	0	1	0	-8	-11	4	
	eta	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	-3	0	-9	-7	30	
	theta	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,5	0	-3	0	-10,5	-7	21	
	iota	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-2	0	-3	0	-8	-7	36	

Tabulka T4.42: Ilustrativní úloha (II), krok (XIV).

V poslední tabulce (T4.42) je zobrazeno bazické řešení B^{15} nacházející se v bodě [6,8]. Při pohledu na všechna předchozí řešení bychom zjistili, že jsme dosáhli řešení, které je totožné s prvním přípustným bazickým řešením, tedy $B^3 \equiv B^{15}$. Pokračováním ve výpočtu by se realizoval znovu celý cyklus a výpočet by nebyl nikdy ukončen.

Během výpočtu je tedy i vhodné nějakým způsobem sledovat, zdali nedošlo k nalezení některého z řešení, které už bylo nalezeno dříve. O této evidenci více v kapitole 3.2.3. Na následujícím obrázku je zobrazeno schéma průchodu prostorem přípustných řešení odpovídající čtrnácti krokům algoritmu.



Obrázek 4.12: Postup množinou přípustných řešení ilustrativní úlohy (II).

Toto schéma (4.12) odpovídá posloupnosti bodů

$$[0,0], [6,0], [6,8], [10,8], [20,8], [23,8], [23,10], [23,20], [23,26], [20,26], [10,26], [6,26], [6,20], [6,10], [6,8],$$

kteřou bylo možné sledovat i v průběhu řešení vícekritériálním simplexovým algoritmem. Lze si všimnout, že s využitím lexikografického přístupu k volbě vstupní proměnné do báze nebylo dosaženo během iterací všech možných kandidátů na optimální řešení. Dosud nedosažení kandidáti na optimální řešení jsou z geometrického hlediska vrcholy vícerozměrného intervalu ε .

V řešení ilustrativní úlohy (II) dosud nebyly vůbec prozkoumány další perspektivní báze, které byly během iterací evidovány v tabulkách. Ve finální evidenční tabulce existuje celkem 8 neprozkoumaných perspektivních bází úlohy. Vyzkoušením všech těchto možností by došlo vždy k přesunu na některý z vrcholů vícerozměrného intervalu ε . Do každého z těchto vrcholů se lze dostat ze dvou sousedních bodů vnějšího obvodu množiny přípustných řešení. Proto bylo nalezeno právě osm neprozkoumaných

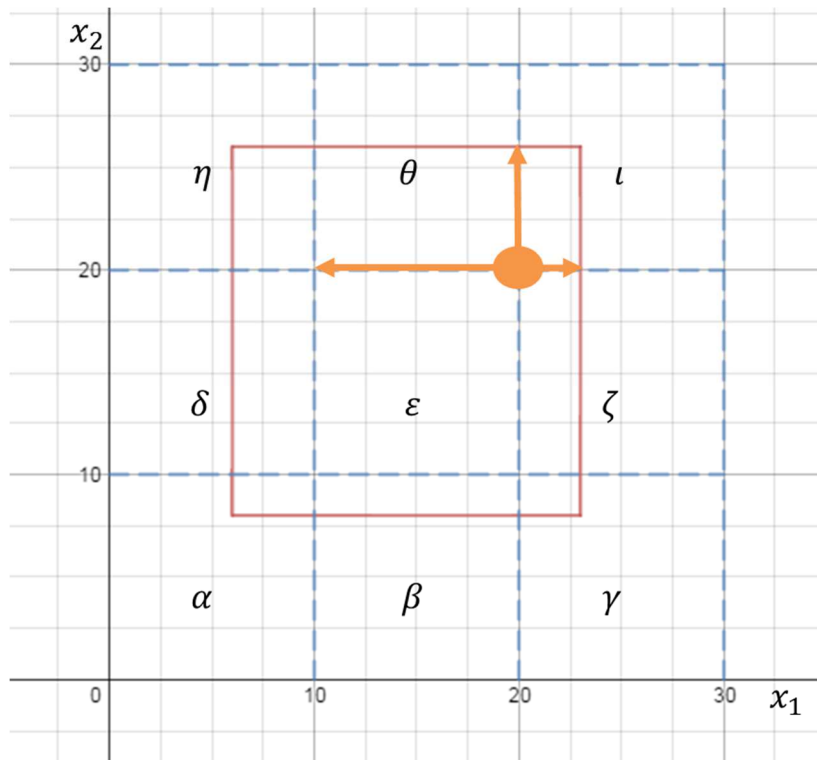
perspektivních cest, z nichž vždy některá dvojice vede do téhož vrcholu vícerozměrného intervalu ε . Zkoumání všech perspektivních bází již nebudeme uvádět dopodrobna a představíme pouze finální řešení, které bychom identifikovali jako optimální, kdybychom vyzkoušeli všechny možnosti.

Následuje tabulka optimálního řešení (T4.43).

cB	xB	x1	x2	r11-	r11+	r12-	r12+	r21-	r21+	r22-	r22+	d1	d2	d3	d4	p1	p2	b	Ω
	x1	1	0	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	20	
	d2	0	0	0	0	-1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	3	
	x2	0	1	0	0	0	0	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	20	
	d4	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	1	0	0	0	1	0	0	5	
	d1	0	0	0	0	1	-1	0	0	0	0	1	0	0	0	-1	0	14	
	r11+	0	0	-1	1	1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	10	
	d3	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-1	0	0	1	0	0	-1	12	
	r21+	0	0	0	0	0	0	-1	1	1	-1	0	0	0	0	0	0	10	
	alfa	0	0	0	0	1	-1	0	0	2	-2	0	0	0	0	-10	-10	60	60
	beta	0	0	0	0	-0,5	0,5	0	0	2	-2	0	0	0	0	-10	-10	30	45
	gama	0	0	0	0	2	-2	0	0	2	-2	0	0	0	0	-10	-10	80	45
	delta	0	0	0	0	1	-1	0	0	-1	1	0	0	0	0	-10	-10	0	30
	epsilon	0	0	0	0	-0,5	0,5	0	0	-1	1	0	0	0	0	-10	-10	-30	15
	zeta	0	0	0	0	2	-2	0	0	-1	1	0	0	0	0	-10	-10	20	15
	eta	0	0	0	0	1	-1	0	0	3	-3	0	0	0	0	-10	-10	80	30
	theta	0	0	0	0	-0,5	0,5	0	0	3	-3	0	0	0	0	-10	-10	50	15
	iota	0	0	0	0	2	-2	0	0	3	-3	0	0	0	0	-10	-10	100	15

Tabulka T4.43: Ilustrativní úloha (II), optimální řešení.

Optimální řešení této ilustrativní úlohy leží v bodě $[20,20]$ a optimální hodnota účelové funkce je 15. Tuto hodnotu můžeme nalézt ve sloupci reálných hodnot souhrnné účelové funkce čtyřikrát. Bod $[20,20]$ je totiž hraničním bodem čtyř vícerozměrných intervalů *epsilon*, *zeta*, *theta* a *iota*. Schéma optimálního řešení je zobrazeno na následujícím obrázku (4.12):



Obrázek 4.13: Schéma optimálního řešení ilustrativní úlohy (II).

Schéma 4.13 odpovídá tabulce optimálního řešení (T4.43) a kolečkem je označen bod $[20,20]$, ve kterém existuje optimální hodnota souhrnné účelové funkce $Z(\mathbf{x}) = 15$. Z tohoto bodu jsou vedeny tři šipky. Ty odpovídají v tabulce (T4.43) všem potenciálním zařazením proměnných $r_{12}^-, r_{22}^-, r_{22}^+$ do báze následující tabulky. Ať už by se pokračovalo zařazením jakékoliv proměnné, bylo by zjištěno, že nalezené báze již buď byly navštíveny, nebo vykazují horší hodnoty souhrnné účelové funkce. Závěrem této úlohy dodejme, že v případě nemonotónního průběhu některé z dílčích účelových funkcí je hledání optimálního řešení podstatně složitější, neboť se v tomto případě nepohybujeme pouze ve směru zlepšování účelové funkce. Přesto je evidentní, že vícekriteriální simplexový algoritmus vede postupně iterace těmi, směry, kde optimální řešení existuje. Tato úloha má ve skutečnosti triviální řešení, které bychom našli postupem uvedeným v kapitole 4.3.1 a aplikace vícekriteriálního simplexového algoritmu slouží pouze ilustrativním účelům. U úloh větších rozměrů je použití vícekriteriálního simplexového algoritmu více než opodstatněné, jelikož u nich nemusí být nutně potřeba zkoumat všechny možné existující báze. Některé báze tento algoritmus dokáže snadno identifikovat jako dominované.

4.7 Ilustrativní úloha hledání optimálního řešení (III) – degenerace a symetrie

Na předchozích dvou úlohách byly ilustrovány dva zásadní případy hledání optimálního řešení – monotónní a nemonotónní. Obě úlohy sloužily především ke znázornění základních aspektů hledání optimálního řešení úlohy s po částech lineárními účelovými funkcemi. Ve třetí a také poslední ilustrativní úloze budou ukázány specifické případy řešení v kontextu použití vícekriteriálního simplexového algoritmu. Řešme nyní úlohu

$$\text{minimalizujte } \mathbf{Z}(\mathbf{x}) = Z_1(x_1) + Z_2(x_2)$$

za podmínek

$$x_1 + x_2 \geq 20$$

$$x_1 - x_2 \leq 10$$

$$-x_1 + x_2 \leq 10$$

$$x_1 + x_2 \leq 40$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

(4-7-1)

kde

$$Z_1(x_1) = x_1, x_1 \in \langle 0, 10 \rangle$$

$$Z_1(x_1) = -0,5x_1 + 15, x_1 \in \langle 10, 20 \rangle$$

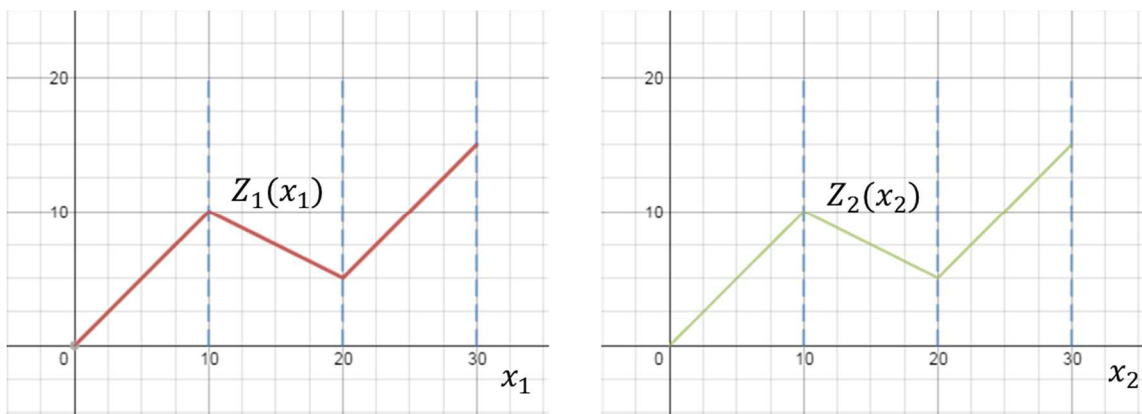
$$Z_1(x_1) = x_1 - 15, x_1 \in \langle 20, 30 \rangle$$

$$Z_2(x_2) = x_2, x_2 \in \langle 0, 10 \rangle$$

$$Z_2(x_2) = -0,5x_2 + 15, x_2 \in \langle 10, 20 \rangle$$

$$Z_2(x_2) = x_2 - 15, x_2 \in \langle 20, 30 \rangle$$

Opět zobrazíme podobu obou dílčích po částech lineárních funkcí:



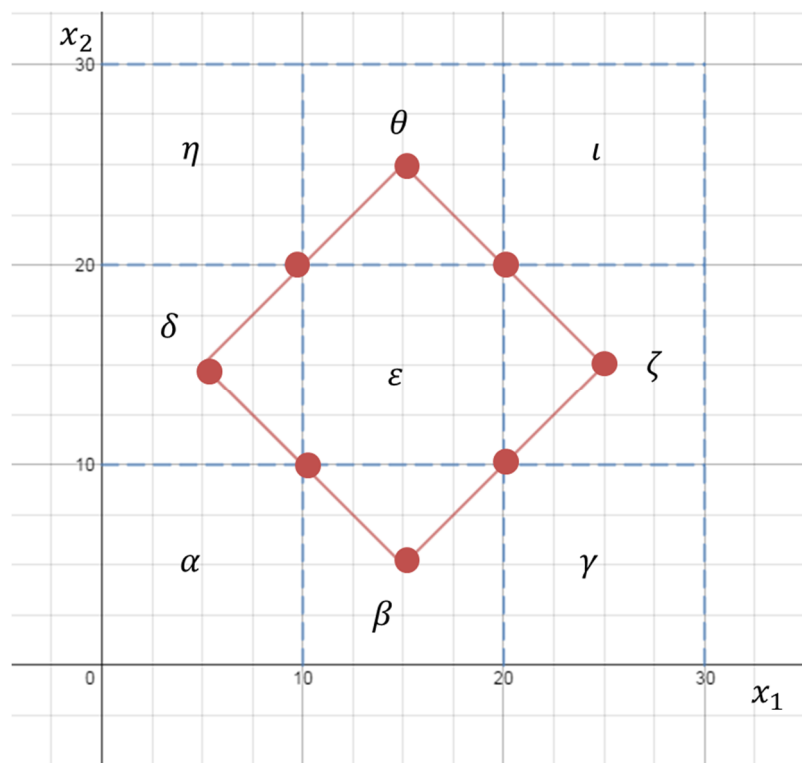
Obrázek 4.14: Průběh dílčích účelových funkcí $Z_1(x_1)$ a $Z_2(x_2)$, (vytvořeno v DGC).

Z předpisu (4-7-1) i obrázku 4.14 je vidět, že $Z_1(x_1) = Z_2(x_2)$. Tato skutečnost může mít nepříznivý dopad na výpočetní složitost úlohy. Dále uvedme vztahy pro výpočet

hodnot souhrnné účelové funkce v jednotlivých vícerozměrných intervalech, které jsou zde opět identické s předchozími dvěma úlohami a označené $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta, \eta, \theta, \iota$.

$$\begin{aligned}
 Z_{\alpha}(\mathbf{x}) &= x_1 + x_2, \forall (x_1, x_2) \in \alpha \\
 Z_{\beta}(\mathbf{x}) &= -0,5x_1 + x_2 + 15, \forall (x_1, x_2) \in \beta \\
 Z_{\gamma}(\mathbf{x}) &= x_1 + x_2 - 15, \forall (x_1, x_2) \in \gamma \\
 Z_{\delta}(\mathbf{x}) &= x_1 - 0,5x_2 + 15, \forall (x_1, x_2) \in \delta \\
 Z_{\varepsilon}(\mathbf{x}) &= -0,5x_1 - 0,5x_2 + 30, \forall (x_1, x_2) \in \varepsilon & (4-7-2) \\
 Z_{\zeta}(\mathbf{x}) &= x_1 - 0,5x_2, \forall (x_1, x_2) \in \zeta \\
 Z_{\eta}(\mathbf{x}) &= x_1 + x_2 - 15, \forall (x_1, x_2) \in \eta \\
 Z_{\theta}(\mathbf{x}) &= -0,5x_1 + x_2, \forall (x_1, x_2) \in \theta \\
 Z_{\iota}(\mathbf{x}) &= x_1 + x_2 - 30, \forall (x_1, x_2) \in \iota
 \end{aligned}$$

U této úlohy bude opět uvedena ilustrace prostoru řešení (4.15), neboť je v tomto případě tento prostor odlišný od předchozích dvou úloh.



Obrázek 4.15: Prostor přípustných řešení ilustrativní úlohy (III).

Na obrázku 4.15 je zobrazen prostor přípustných řešení. Prostor všech přípustných řešení je reprezentován čtvercem s vrcholy $[15,5], [25,15], [15,25], [5,15]$. Prostor je zobrazen včetně všech kandidátů na optimální řešení úlohy. Těchto kandidátů je v tomto případě celkem 8. Celkový počet všech přípustných bází této úlohy je ovšem vyšší. Z obecného popisu prostoru přípustných řešení je známo, že úsečky, které tvoří

vícerozměrné intervaly, jsou v analytickém tvaru reprezentovány rovnicemi. Ve vrcholech vícerozměrného intervalu ε se vždy protínají 3 úsečky. To znamená, že v kontextu simplexového algoritmu v těchto bodech bude řešení degenerované.

Model převedeme do kanonického tvaru:

$$\text{minimalizujte } \mathbf{Z}(\mathbf{x}) = (Z_\alpha(\mathbf{x}) \dots Z_\iota(\mathbf{x}))^T$$

za podmínek

$$x_1 + x_2 - d_1 + p_1 = 20$$

$$x_1 - x_2 + d_2 = 10$$

$$-x_1 + x_2 + d_3 = 10$$

$$x_1 + x_2 + d_4 = 40$$

$$r_{11}^- - r_{11}^+ = 10$$

$$r_{12}^- - r_{12}^+ = 20$$

$$r_{21}^- - r_{21}^+ = 10$$

$$r_{22}^- - r_{22}^+ = 20$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

(4-7-3)

kde

$$Z_\alpha(\mathbf{x}) = x_1 + x_2 + 10p_1, \forall (x_1, x_2) \in \alpha$$

$$Z_\beta(\mathbf{x}) = -0,5x_1 + x_2 + 15 + 10p_1, \forall (x_1, x_2) \in \beta$$

$$Z_\gamma(\mathbf{x}) = x_1 + x_2 - 15 + 10p_1, \forall (x_1, x_2) \in \gamma$$

$$Z_\delta(\mathbf{x}) = x_1 - 0,5x_2 + 15 + 10p_1, \forall (x_1, x_2) \in \delta$$

$$Z_\varepsilon(\mathbf{x}) = -0,5x_1 - 0,5x_2 + 30 + 10p_1, \forall (x_1, x_2) \in \varepsilon$$

$$Z_\zeta(\mathbf{x}) = x_1 - 0,5x_2 + 10p_1, \forall (x_1, x_2) \in \zeta$$

$$Z_\eta(\mathbf{x}) = x_1 + x_2 - 15 + 10p_1, \forall (x_1, x_2) \in \eta$$

$$Z_\theta(\mathbf{x}) = -0,5x_1 + x_2 + 10p_1, \forall (x_1, x_2) \in \theta$$

$$Z_\iota(\mathbf{x}) = x_1 + x_2 - 30 + 10p_1, \forall (x_1, x_2) \in \iota$$

Model zapíšeme do výchozí modifikované simplexové tabulky (T4.44).

	alfa	1	1															10	
	beta	-0,5	1															10	
	gama	1	1															10	
	delta	1	-0,5															10	
	epsilon	-0,5	-0,5															10	
	zeta	1	-0,5															10	
	eta	1	1															10	
	theta	-0,5	1															10	
	iota	1	1															10	
cB	xB	x1	x2	r11-	r11+	r12-	r12+	r21-	r21+	r22-	r22+	d1	d2	d3	d4	p1	b	Ω	
10	p1	1	1									-1				1	20	20	
0	d2	1	-1										1				10	10	
0	d3	-1	1											1			10	-	
0	d4	1	1												1		40	40	
0	r11-	1		1	-1												10	10	
0	r12-	1				1	-1										20	20	
0	r21-		1					1	-1								10	-	
0	r22-		1							1	-1						20	-	
	alfa	9	9	0	0	0	0	0	0	0	0	-10	0	0	0	0	200	200	
	beta	10,5	9	0	0	0	0	0	0	0	0	-10	0	0	0	0	200	215	
	gama	9	9	0	0	0	0	0	0	0	0	-10	0	0	0	0	200	185	
	delta	9	10,5	0	0	0	0	0	0	0	0	-10	0	0	0	0	200	215	
	epsilon	10,5	10,5	0	0	0	0	0	0	0	0	-10	0	0	0	0	200	230	
	zeta	9	10,5	0	0	0	0	0	0	0	0	-10	0	0	0	0	200	200	
	eta	9	9	0	0	0	0	0	0	0	0	-10	0	0	0	0	200	185	
	theta	10,5	9	0	0	0	0	0	0	0	0	-10	0	0	0	0	200	200	
	iota	9	9	0	0	0	0	0	0	0	0	-10	0	0	0	0	200	170	

Tabulka T4.44: Ilustrativní úloha (III), krok (I).

Úloha začíná v bodě, kde řešení není přípustné. V první iteraci nedojde k očekávanému vyřazení pomocné proměnné p_1 , ale proměnné d_2 . Je tedy jasné, že následující řešení přípustné nebude. Zařadíme do báze proměnnou x_1 a přejdeme k řešení B^2 (T4.45).

cB	xB	x1	x2	r11-	r11+	r12-	r12+	r21-	r21+	r22-	r22+	d1	d2	d3	d4	p1	b	Ω
	p1	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	-1	0	0	1	10	5
	x1	1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	10	-
	d3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	20	-
	d4	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	1	0	30	15
	r11-	0	1	1	-1	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0
	r12-	0	1	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	10	10
	r21-	0	1	0	0	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	0	10	10
	r22-	0	1	0	0	0	0	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	20	20
	alfa	0	18	0	0	0	0	0	0	0	0	-10	-9	0	0	0	110	110
	beta	0	19,5	0	0	0	0	0	0	0	0	-10	-10,5	0	0	0	95	110
	gama	0	18	0	0	0	0	0	0	0	0	-10	-9	0	0	0	110	95
	delta	0	19,5	0	0	0	0	0	0	0	0	-10	-9	0	0	0	110	125
	epsilon	0	21	0	0	0	0	0	0	0	0	-10	-10,5	0	0	0	95	125
	zeta	0	19,5	0	0	0	0	0	0	0	0	-10	-9	0	0	0	110	110
	eta	0	18	0	0	0	0	0	0	0	0	-10	-9	0	0	0	110	95
	theta	0	19,5	0	0	0	0	0	0	0	0	-10	-10,5	0	0	0	95	95
	iota	0	18	0	0	0	0	0	0	0	0	-10	-9	0	0	0	110	80

Tabulka T4.45: Ilustrativní úloha (III), krok (II).

V řešení B^2 k vyřazení pomocné proměnné p_1 opět nedojde. V této iteraci dojde pouze ke změně báze, hodnoty pravých stran zůstanou stejné. Zařadíme do báze proměnnou x_2 a přejdeme k řešení B^3 (T4.46).

cB	xB	x1	x2	r11-	r11+	r12-	r12+	r21-	r21+	r22-	r22+	d1	d2	d3	d4	p1	b	Ω
	p1	0	0	-2	2	0	0	0	0	0	0	-1	1	0	0	1	10	5
	x1	1	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	10	-
	d3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	20	-
	d4	0	0	-2	2	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	30	15
	x2	0	1	1	-1	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	-
	r12-	0	0	-1	1	1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	10	10
	r21-	0	0	-1	1	0	0	1	-1	0	0	0	1	0	0	0	10	10
	r22-	0	0	-1	1	0	0	0	0	1	-1	0	1	0	0	0	20	20
	alfa	0	0	-18	18	0	0	0	0	0	0	-10	9	0	0	0	110	110
	beta	0	0	-19,5	19,5	0	0	0	0	0	0	-10	9	0	0	0	95	110
	gama	0	0	-18	18	0	0	0	0	0	0	-10	9	0	0	0	110	95
	delta	0	0	-19,5	19,5	0	0	0	0	0	0	-10	10,5	0	0	0	110	125
	epsilon	0	0	-21	21	0	0	0	0	0	0	-10	10,5	0	0	0	95	125
	zeta	0	0	-19,5	19,5	0	0	0	0	0	0	-10	10,5	0	0	0	110	110
	eta	0	0	-18	18	0	0	0	0	0	0	-10	9	0	0	0	110	95
	theta	0	0	-19,5	19,5	0	0	0	0	0	0	-10	9	0	0	0	95	95
	iota	0	0	-18	18	0	0	0	0	0	0	-10	9	0	0	0	110	80

Tabulka T4.46: Ilustrativní úloha (III), krok (III).

Řešení B^3 stále není přípustné. Úloha obsahuje množství degenerovaných bazických řešení, a proto se nejprve proměnné v bázi musí vhodným způsobem „poskládat“, aby bylo možné v postupu prostorem přípustných řešení pokračovat dále. Nyní již zvolíme dle testu přípustnosti jako vystupující proměnnou p_1 a přejdeme k řešení B^4 .

cB	xB	x1	x2	r11-	r11+	r12-	r12+	r21-	r21+	r22-	r22+	d1	d2	d3	d4	p1	b	Ω
	r11+	0	0	-1	1	0	0	0	0	0	0	-0,5	0,5	0	0	0,5	5	-
	x1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-0,5	0,5	0	0	0,5	15	-
	d3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	20	-
	d4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	-1	20	20
	x2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	-0,5	-0,5	0	0	0,5	5	-
	r12-	0	0	0	0	1	-1	0	0	0	0	0,5	-0,5	0	0	-0,5	5	10
	r21-	0	0	0	0	0	0	1	-1	0	0	0,5	0,5	0	0	-0,5	5	10
	r22-	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-1	0,5	0,5	0	0	-0,5	15	30
	alfa	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	-9	20	20
	beta	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-0,25	-0,75	0	0	-9,75	-2,5	12,5
	gama	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	-9	20	5
	delta	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-0,25	0,75	0	0	-9,75	12,5	27,5
	epsilon	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,5	0	0	0	-10,5	-10	20
	zeta	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-0,25	0,75	0	0	-9,75	12,5	12,5
	eta	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	-9	20	5
	theta	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-0,25	-0,75	0	0	-9,75	-2,5	-2,5
	iota	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	-9	20	-10

Tabulka T4.47: Ilustrativní úloha (III), krok (IV).

Řešení B^4 (T4.47) je první přípustné řešení úlohy. Geometricky toto řešení leží v bodě [15,5] a hodnota účelová funkce je 12,5. Nabízejí se dvě možnosti dalšího postupu dle hodnot stínových cen tohoto bazického řešení. Zvolíme první zleva jako vstupní proměnnou d_1 a přejdeme k dalšímu řešení B^5 . Evidenci neprozkoumaných perspektivních bází u této úlohy nebudeme zavádět. Účelem této úlohy je v následujících dvou krocích ilustrovat výpočetní obtíže degenerovaných úloh.

cB	xB	x1	x2	r11-	r11+	r12-	r12+	r21-	r21+	r22-	r22+	d1	d2	d3	d4	p1	b	Ω
	r11+	0	0	-1	1	1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	10	-
	x1	1	0	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	20	-
	d3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	20	-
	d4	0	0	0	0	-2	2	0	0	0	0	0	1	0	1	0	10	5
	x2	0	1	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	10	-
	d1	0	0	0	0	2	-2	0	0	0	0	1	-1	0	0	-1	10	-
	r21-	0	0	0	0	-1	1	1	-1	0	0	0	1	0	0	0	0	0
	r22-	0	0	0	0	-1	1	0	0	1	-1	0	1	0	0	0	10	10
	Alfa	0	0	0	0	2	-2	0	0	0	0	0	-1	0	0	-10	30	30
	Beta	0	0	0	0	0,5	-0,5	0	0	0	0	0	-1	0	0	-10	0	15
	Gama	0	0	0	0	2	-2	0	0	0	0	0	-1	0	0	-10	30	15
	Delta	0	0	0	0	0,5	-0,5	0	0	0	0	0	0,5	0	0	-10	15	30
	Epsilon	0	0	0	0	-1	1	0	0	0	0	0	0,5	0	0	-10	-15	15
	Zeta	0	0	0	0	0,5	-0,5	0	0	0	0	0	0,5	0	0	-10	15	15
	Eta	0	0	0	0	2	-2	0	0	0	0	0	-1	0	0	-10	30	15
	Theta	0	0	0	0	0,5	-0,5	0	0	0	0	0	-1	0	0	-10	0	0
	Iota	0	0	0	0	2	-2	0	0	0	0	0	-1	0	0	-10	30	0

Tabulka T4.48: Ilustrativní úloha (III), krok (V).

Řešení B^5 leží v bodě [20,10]. Tento bod je právě bodem, kde nastává rovnost třech omezujících podmínek zároveň. Nulová pravá strana značí degeneraci řešení. Hodnota účelové funkce je 15 a je označena čtyřikrát, jelikož toto řešení leží na hranici čtyř

vícerozměrných intervalů. Tmavou barvou je označena návratová cesta, která je vyloučena z výběru vstupní proměnné. Přejdeme k řešení B^6 .

cB	xB	x1	x2	r11-	r11+	r12-	r12+	r21-	r21+	r22-	r22+	d1	d2	d3	d4	p1	b	Ω
	r11+	0	0	-1	1	0	0	1	-1	0	0	0	1	0	0	0	10	-
	x1	1	0	0	0	0	0	1	-1	0	0	0	1	0	0	0	20	-
	d3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	20	-
	d4	0	0	0	0	0	0	-2	2	0	0	0	-1	0	1	0	10	5
	x2	0	1	0	0	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	0	10	-
	d1	0	0	0	0	0	0	2	-2	0	0	1	1	0	0	-1	10	-
	r12+	0	0	0	0	-1	1	1	-1	0	0	0	1	0	0	0	0	-
	r22-	0	0	0	0	0	0	-1	1	1	-1	0	0	0	0	0	10	10
	alfa	0	0	0	0	0	0	2	-2	0	0	0	1	0	0	-10	30	30
	beta	0	0	0	0	0	0	0,5	-0,5	0	0	0	-0,5	0	0	-10	0	15
	gama	0	0	0	0	0	0	2	-2	0	0	0	1	0	0	-10	30	15
	delta	0	0	0	0	0	0	0,5	-0,5	0	0	0	1	0	0	-10	15	30
	epsilon	0	0	0	0	0	0	-1	1	0	0	0	-0,5	0	0	-10	-15	15
	zeta	0	0	0	0	0	0	0,5	-0,5	0	0	0	1	0	0	-10	15	15
	eta	0	0	0	0	0	0	2	-2	0	0	0	1	0	0	-10	30	15
	theta	0	0	0	0	0	0	0,5	-0,5	0	0	0	-0,5	0	0	-10	0	0
	iota	0	0	0	0	0	0	2	-2	0	0	0	1	0	0	-10	30	0

Tabulka T4.49: Ilustrativní úloha (III), krok (VI).

Řešení B^6 má totožné pravé strany a hodnoty účelových funkcí s předchozím řešením a došlo pouze k záměně některých proměnných v bázi. Tři omezující podmínky, které se v tomto bodě setkávají, jsou určeny proměnnými $r_{12}^-, r_{12}^+, r_{21}^-, r_{21}^+, d_2$. Některé z těchto proměnných se musí v tomto bodě vystřídat v bázi, aby bylo možné pokračovat dále. Pokud je některý vrchol množiny přípustných řešení obecně určen n podmínkami, potom je i nutné v témže bodě provést $n - 1$ iterací vícekriteriálního simplexového algoritmu. Celý postup řešení této konkrétní úlohy už nebude uveden. Ukažme optimální řešení této úlohy nalezené vícekriteriálním simplexovým algoritmem v tabulce (T4.50).

cB	xB	x1	x2	r11-	r11+	r12-	r12+	r21-	r21+	r22-	r22+	d1	d2	d3	d4	p1	b	Ω
	r11+	0	0	-1	1	1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	10	10
	x1	1	0	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	20	20
	d3	0	0	0	0	2	-2	0	0	0	0	0	0	1	-1	0	10	5
	r21+	0	0	0	0	-1	1	-1	1	0	0	0	0	0	1	0	10	-
	x2	0	1	0	0	-1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	20	-
	d1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	-1	20	-
	d2	0	0	0	0	-2	2	0	0	0	0	0	1	0	1	0	10	-
	r22-	0	0	0	0	1	-1	0	0	1	-1	0	0	0	-1	0	0	0
	Alfa	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-10	40	40
	Beta	0	0	0	0	-1,5	1,5	0	0	0	0	0	0	0	1	-10	10	25
	Gama	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-10	40	25
	Delta	0	0	0	0	1,5	-1,5	0	0	0	0	0	0	0	-0,5	-10	10	25
	Epsilon	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-0,5	-10	-20	10
	Zeta	0	0	0	0	1,5	-1,5	0	0	0	0	0	0	0	-0,5	-10	10	10
	Eta	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-10	40	25
	Theta	0	0	0	0	-1,5	1,5	0	0	0	0	0	0	0	1	-10	10	10
	Iota	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-10	40	10

Tabulka T4.50: Ilustrativní úloha (III), optimální řešení.

V tabulce (T4.50) je optimální řešení úlohy. Toto řešení je degenerované, jelikož $r_{22}^- = 0$, a tak je jisté, že totéž optimální řešení úlohy lze zobrazit i pomocí jiné báze. Optimální hodnota účelové funkce je 10.

Přítomnost degenerace v úloze s nekonvexní po částech lineární funkcí neznemožňuje nalezení optimálního řešení. Výpočet této úlohy se ovšem prodlužuje. Zejména pokud omezující podmínky úlohy svou strukturou v prostoru řešení kopírují strukturu vícerozměrných intervalů určených lineárními segmenty dílčích účelových funkcí.

Tato úloha je rovněž specifická totožností obou účelových funkcí. Pokud bychom prostor přípustných řešení této úlohy (4.14) imaginárně rozdělili přímkou s předpisem $x_2 = x_1$, zjistili bychom, že tato přímka je osou souměrnosti tohoto prostoru. Hodnoty účelových funkcí existují identicky na obou poloprostorech určených touto přímkou. Z hlediska použitého algoritmu je tato situace nevýhodná. Vícekriteriální simplexový algoritmus vede k optimálnímu řešení vždy určitými perspektivními směry. U symetrické úlohy jako je tato je jednoznačnost cest k optimálnímu řešení narušena a narůstá počet všech možných řešení, která je třeba celkově prozkoumat.

4.8 Orientace ve vícerozměrném prostoru řešení

Všechny doposud řešené ilustrativní úlohy byly svoji povahou nekomplikované a vykazovaly pouze základní atributy modelové úlohy po částech lineárního programování s nekonvexní účelovou funkcí. Zadání jednotlivých úloh bylo zvoleno uvedeným způsobem, aby bylo možné přístup k řešení ilustrovat snadno a pro čtenáře

přívětivou cestou. Obecný postup řešení lze aplikovat i na složitější úlohy. V ilustrativních úlohách byla doposud opomíjena komplikace, která se v těchto úlohách přímo neprojevila. Touto komplikací rozumíme identifikace reálné hodnoty souhrnné účelové funkce $Z(x)$. V řešených úlohách byla vždy ze sloupce reálných hodnot (T4.2) účelové funkce vybrána jedna či více (v případě, že řešení leželo na pomezí vícerozměrných intervalů) hodnot. Tuto hodnotu bylo možné identifikovat pohledem do schématu prostoru přípustných řešení, tj. určili jsme, ve kterém vícerozměrném intervalu $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta, \eta, \theta, \iota$ se stávající řešení nachází a dle souhrnné účelové funkce pro daný interval jsme určili dosazením hodnot proměnných její hodnotu.

Při představě úlohy více než tří rozhodovacích proměnných se přidává první komplikace, a tou je nemožnost rovinného či prostorového²⁸ zobrazení. K tomu dále připojíme úvahu, že dílčí účelové funkce mají větší počet lineárních segmentů. V ilustrativních úlohách existovaly pro každou dílčí účelovou funkci pouze 3 segmenty. V případě většího počtu segmentů vzniká složitá síť, jejíž průnik s prostorem řešení úlohy rozšiřuje množinu o nové kandidáty na optimální řešení.

Má-li každá dílčí účelová funkce modelu právě p lineárních segmentů, potom z hlediska zobrazení jednotlivých vícerozměrných intervalů existuje v R^2 právě p^2 obdélníků, v R^3 právě p^3 rovnoběžnostěnů a v R^n právě p^n polyedrů, které vzniknou jako průnik poloprostorů určených páry vzájemně rovnoběžných nadrovin řádu n . Zejména v R^n vizuálně obtížně představitelný prostor ztěžuje identifikaci reálné hodnoty souhrnné účelové funkce v jednotlivých krocích algoritmu řešení.

Aby bylo možné identifikovat, ve kterém vícerozměrném intervalu se stávající řešení právě nachází, bylo by v praktickém výpočtu nutné porovnávat hodnoty rozhodovacích proměnných x_j s příslušnými rozdílovými proměnnými dělicích bodů $r_{jk}^{-/+}$. Přístup k určení „momentální polohy“ ukažme na malém ilustrativním příkladu v R^2 .

Uvažujme úlohu dvou proměnných x_1, x_2 a dvou dílčích účelových funkcí $Z_1(x_1), Z_2(x_2)$, z nichž každá z těchto funkcí je definována pomocí tří lineárních segmentů. Potom jistě existují podmínky dělicích bodů tohoto modelu:

²⁸ Zobrazení úlohy v prostoru R^3 můžeme taktéž považovat za nepříznivé, a to i v případě dostupného softwaru, který dokáže interaktivně zobrazit prostor řešení úlohy. Toto zobrazení je vhodné pouze pro jednodušší úlohy tří proměnných.

$$\begin{aligned}
x_1 + r_{11}^- - r_{11}^+ &= k_{11} \\
x_1 + r_{12}^- - r_{12}^+ &= k_{12} \\
x_2 + r_{21}^- - r_{21}^+ &= k_{21} \\
x_2 + r_{22}^- - r_{22}^+ &= k_{21}
\end{aligned}
\tag{4-8-1}$$

a dílčí účelové funkce takové, že

$$\begin{aligned}
Z_1(x_1) &= Z_{11}(x_1), x \in \langle 0; k_{11} \rangle \\
Z_1(x_1) &= Z_{12}(x_1), x \in \langle k_{11}; k_{12} \rangle \\
Z_1(x_1) &= Z_{13}(x_1), x \in \langle k_{12}; \infty \rangle \\
Z_2(x_2) &= Z_{21}(x_2), x \in \langle 0; k_{21} \rangle \\
Z_2(x_2) &= Z_{22}(x_2), x \in \langle k_{21}; k_{22} \rangle \\
Z_2(x_2) &= Z_{23}(x_2), x \in \langle k_{22}; \infty \rangle
\end{aligned}
\tag{4-8-2}$$

Potom následující výroky jsou pravdivé:

$$\begin{aligned}
x_1 \leq k_{11} \wedge x_2 \leq k_{21} &\Rightarrow Z(x) = Z_{11}(x_1) + Z_{21}(x_2) \\
k_{11} \leq x_1 \leq k_{12} \wedge x_2 \leq k_{21} &\Rightarrow Z(x) = Z_{12}(x_1) + Z_{21}(x_2) \\
x_1 \geq k_{12} \wedge x_2 \leq k_{21} &\Rightarrow Z(x) = Z_{13}(x_1) + Z_{21}(x_2) \\
x_1 \leq k_{11} \wedge k_{21} \leq x_2 \leq k_{22} &\Rightarrow Z(x) = Z_{11}(x_1) + Z_{22}(x_2) \\
k_{11} \leq x_1 \leq k_{12} \wedge k_{21} \leq x_2 \leq k_{21} &\Rightarrow Z(x) = Z_{12}(x_1) + Z_{22}(x_2) \\
x_1 \geq k_{12} \wedge k_{21} \leq x_2 \leq k_{21} &\Rightarrow Z(x) = Z_{13}(x_1) + Z_{22}(x_2) \\
x_1 \leq k_{11} \wedge x_2 \geq k_{22} &\Rightarrow Z(x) = Z_{11}(x_1) + Z_{23}(x_2) \\
k_{11} \leq x_1 \leq k_{12} \wedge x_2 \geq k_{22} &\Rightarrow Z(x) = Z_{12}(x_1) + Z_{23}(x_2) \\
x_1 \geq k_{12} \wedge x_2 \geq k_{22} &\Rightarrow Z(x) = Z_{13}(x_1) + Z_{23}(x_2)
\end{aligned}
\tag{4-8-3}$$

Uvedené řešení není příliš praktické z důvodu velkého množství ověřování pravdivosti jednotlivých výroků, kterých je v R^n celkem p^n . Tento přístup je proto spíše vhodný pro úlohy menších rozměrů.

4.8.1 Modifikace cenových koeficientů úlohy

Je třeba nalézt takový přístup, který ze všech možných hodnot souhrnné účelové funkce určí ty hodnoty, které skutečně platí pro stávající řešení. Elegantním řešením tohoto problému je využití prohibitivních cenových koeficientů v úloze vícekritériálního programování. Stejně jako jsou tyto koeficienty využity pro vyloučení pomocných

proměnných z řešení, lze je využít i pro účel identifikace polohy na konvexním polyedru.

Reálnou hodnotu souhrnné účelové funkce lze během výpočtu nalézt ve sloupci skutečných hodnot účelové funkce v pravé dolní části modifikované simplexové tabulky. Z ilustrativních příkladů již víme, že vždy jen některé z hodnot tohoto sloupce vyjadřují skutečnou hodnotu souhrnné účelové funkce. Ostatní hodnoty přitom ani nemají žádnou reálnou interpretaci, jelikož vyjadřují hodnotu souhrnné účelové funkce v oblastech prostoru přípustných řešení, kde vůbec nejsou příslušné dílčí účelové funkce definovány. Bylo by proto vhodné tyto neinterpretovatelné hodnoty nějakým způsobem odlišit od hodnot hledaných.

Ve všech ilustrativních úlohách byly cenové koeficienty rozdílových proměnných $r_{jk}^{-/+}$ všech dílčích účelových funkcí vždy nulové. Pokud namísto nulových koeficientů zavedeme prohibitivní sazby rozdílových proměnných v těch vícerozměrných intervalech, ve kterých dílčí účelové funkce nemají smysl, potom i v těchto vícerozměrných intervalech obdržíme pro jednotlivá bazická řešení nežádoucí hodnoty účelových funkcí. Zvolíme-li jako prohibitivní sazbu dostatečně velkou hodnotu, potom se vzniklé nežádoucí hodnoty účelových funkcí budou dostatečně odlišovat od hodnot reálných.

Uvedme příklad v R^2 pro $p = 3$ a poslední segment je vždy ohraničen reálným číslem k_{j3} . Obecně přeformulujeme účelové funkce na jednotlivých vícerozměrných intervalech na:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{Z}(\mathbf{x}) &= Z_{11}(x_1) + Z_{21}(x_2) + Mr_{11}^+ + Mr_{12}^+, Mr_{21}^+ + Mr_{22}^+, \\
 &\quad x_1 \in \langle 0; k_{11} \rangle \wedge x_2 \in \langle 0; k_{21} \rangle; \\
 \mathbf{Z}(\mathbf{x}) &= Z_{12}(x_1) + Z_{21}(x_2) + Mr_{11}^- + Mr_{12}^+, Mr_{21}^+ + Mr_{22}^+, \\
 &\quad x_1 \in \langle k_{11}; k_{12} \rangle \wedge x_2 \in \langle 0; k_{21} \rangle; \\
 \mathbf{Z}(\mathbf{x}) &= Z_{13}(x_1) + Z_{21}(x_2) + Mr_{11}^- + Mr_{12}^+, Mr_{21}^+ + Mr_{22}^+, \\
 &\quad x_1 \in \langle k_{12}; k_{13} \rangle \wedge x_2 \in \langle 0; k_{21} \rangle; \\
 \mathbf{Z}(\mathbf{x}) &= Z_{11}(x_1) + Z_{22}(x_2) + Mr_{11}^- + Mr_{12}^+, Mr_{21}^- + Mr_{22}^+, \\
 &\quad x_1 \in \langle 0; k_{12} \rangle \wedge x_2 \in \langle k_{21}; k_{22} \rangle; \\
 \mathbf{Z}(\mathbf{x}) &= Z_{12}(x_1) + Z_{22}(x_2) + Mr_{11}^- + Mr_{12}^+, Mr_{21}^- + Mr_{22}^+, \\
 &\quad x_1 \in \langle k_{11}; k_{12} \rangle \wedge x_2 \in \langle k_{21}; k_{22} \rangle; \\
 \mathbf{Z}(\mathbf{x}) &= Z_{13}(x_1) + Z_{22}(x_2) + Mr_{11}^- + Mr_{12}^+, Mr_{21}^- + Mr_{22}^+, \\
 &\quad x_1 \in \langle k_{12}; k_{13} \rangle \wedge x_2 \in \langle k_{21}; k_{22} \rangle;
 \end{aligned} \tag{4-8-4}$$

$$\mathbf{Z}(\mathbf{x}) = Z_{11}(x_1) + Z_{23}(x_2) + Mr_{11}^+ + Mr_{12}^+, Mr_{21}^- + Mr_{22}^-,$$

$$x_1 \in \langle 0; k_{11} \rangle \wedge x_2 \in \langle k_{22}; k_{23} \rangle;$$

$$\mathbf{Z}(\mathbf{x}) = Z_{12}(x_1) + Z_{23}(x_2) + Mr_{11}^- + Mr_{12}^+, Mr_{21}^- + Mr_{22}^-,$$

$$x_1 \in \langle k_{11}; k_{12} \rangle \wedge x_2 \in \langle k_{22}; k_{23} \rangle;$$

$$\mathbf{Z}(\mathbf{x}) = Z_{13}(x_1) + Z_{23}(x_2) + Mr_{11}^- + Mr_{12}^+, Mr_{21}^- + Mr_{22}^-,$$

$$x_1 \in \langle k_{12}; k_{13} \rangle \wedge x_2 \in \langle k_{22}; k_{23} \rangle;$$

$$\mathbf{Z}(\mathbf{x}) \rightarrow \text{MIN}: M \gg Z_j, \forall j = 1, 2;$$

$$\mathbf{Z}(\mathbf{x}) \rightarrow \text{MAX}: M \ll Z_j, \forall j = 1, 2;$$

Tímto jsou znevýhodněny ty proměnné rozdílových bodů, které v daných vícerozměrných intervalech nemohou existovat (nabývat nenulových hodnot). Výsledkem jsou velmi vysoké (nízké) hodnoty účelových funkcí v těch intervalech, kde stávající řešení nemá smysl. Např. pokud

$$x_1 \in \langle 0; k_{11} \rangle \wedge x_2 \in \langle 0; k_{21} \rangle \quad (4-8-5)$$

Potom

$$Z_{11}(x_1) + Z_{21}(x_2) = Z(\mathbf{x})$$

$$Z_{1k}(x_1) + Z_{2k}(x_2) = M, k > 1 \quad (4-8-6)$$

Tímto způsobem snadno identifikujeme skutečnou hodnotu souhrnné účelové funkce v příslušném vícerozměrném intervalu, jelikož se tato hodnota svým řádem značně odlišuje od hodnot v ostatních intervalech.

4.8.2 Orientace v evidenci neprozkoumaných bází úlohy

V úloze (4-6-1) bylo ukázáno, že volbou vstupní proměnné do báze lexikografickým přístupem se v některé iteraci lze dostat k bazickému řešení, které již bylo dosaženo v některé iteraci předchozí. V takovém případě je výpočet této větve řešení ukončen a přejde se ke zkoumání některé z perspektivních bází v evidenční tabulce. Při velkém počtu iterací v ručním výpočtu je obtížné tuto situaci zaregistrovat, aniž by byl veden nějaký záznam o již navštívených bázích. Dvě bazická řešení považujeme za totožná, pokud je výčet proměnných těchto bází totožný. Pokud je totožný výčet proměnných, potom i hodnoty těchto proměnných v obou bazických řešeních jsou totožné.

V ilustrativních úlohách v této práci se jednalo o úlohy o osmi rovnicích, čili báze úlohy byla výčetem osmi proměnných. Porovnávat takové množství proměnných navzájem je značně nepraktické. K určení, zda jsou dvě báze totožné, postačí srovnání rozhodovacích proměnných modelu. Hodnoty rozhodovacích proměnných představují

polohu stávajícího řešení v prostoru všech řešení. Je tedy možné porovnávat pouze hodnoty rozhodovacích proměnných během výpočtu. V případě, že řešení není degenerované, potom lze tvrdit, že porovnávané báze jsou stejné. V případě degenerovaného řešení je nutné porovnat i hodnoty všech ostatních proměnných.

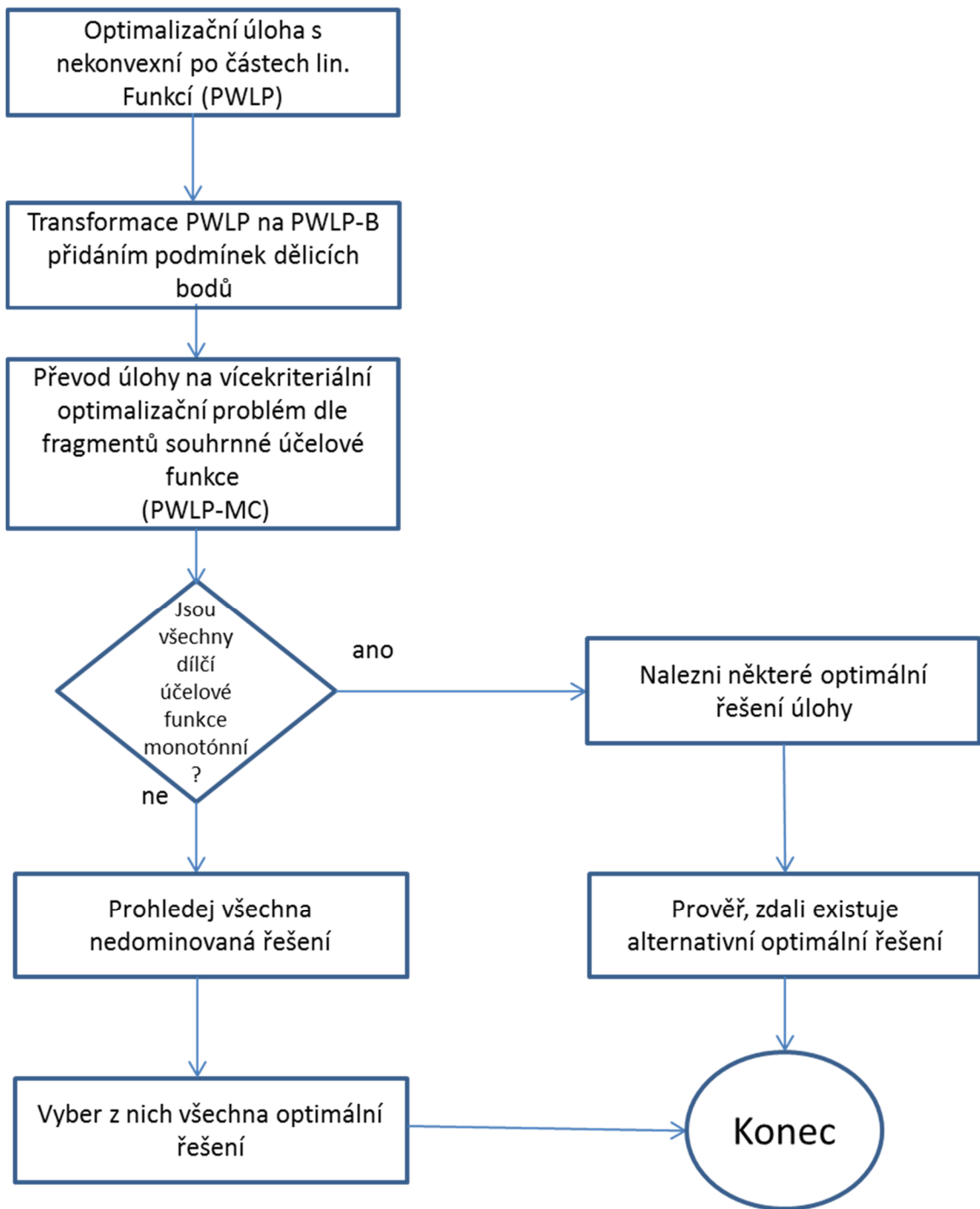
5 Algoritmus řešení optimalizační úlohy s nekonvexní po částech lineární funkcí

V kapitole 4 byl postupně popsán vznik navrhovaného algoritmu a jeho využitelnost byla demonstrována na třech odlišných úlohách. Bylo ukázáno, že postup řešení je odlišný pro úlohu s monotónní účelovou funkcí a s nemonotónní účelovou funkcí. Ve třetí ilustrační úloze bylo poukázáno na úskalí některých typů úloh, ať už s monotónní či nemonotónní účelovou funkcí.

Na počátku algoritmu je vždy formulace úlohy. V případě této práce předpokládáme již formulovaný matematický model, který je abstrakcí nějaké reálné úlohy. V rámci této práce zároveň předpokládáme, že matematický model úlohy je formulovaný správně a smysluplně. Tedy že jeho omezující podmínky si navzájem neodporují a že existuje nějaké přípustné řešení úlohy, které není neomezené. Na počátku celého algoritmu je tedy zadán optimalizační model s nekonvexní po částech lineární účelovou funkcí a lineárními omezujícími podmínkami (PWLP). Tento model je poté jednoznačným způsobem převeden na model s podmínkami dělicích bodů (PWLP-B), který zohledňuje existence lineárních segmentů dílčích po částech lineárních funkcí modelu.

Další fází je převedení modelu PWLP-B na model vícekriteriálního programování (PWLP-MC) Dle schématu na obrázku 4.1 je účelová funkce modelu PWLP-B redefinována pomocí fragmentů původní účelové funkce na vektorovou účelovou funkci. Na model ve tvaru PWLP-MC je již možné aplikovat vícekriteriální simplexový algoritmus. Algoritmus prohledává všechny nedominované kandidáty na optimální řešení, a to rozdílným způsobem pro úlohu s monotónní či nemonotónní funkcí. Schéma celého postupu je zobrazeno diagramem na obrázku 5.1.

Bylo ukázáno, že v případě monotónních dílčích účelových funkcí směřuje algoritmus k řešení jednoznačně. Je ovšem potřeba prověřit, zdali neexistuje další alternativní optimální řešení nebo dokonce nekonečně mnoho optimálních řešení. V situaci, kdy je alespoň jedna z dílčích účelových funkcí nemonotónní, je třeba prověřit všechna nedominovaná řešení, jelikož algoritmus k optimálnímu řešení nesměruje jednoznačně. Tato řešení je pak třeba porovnat a vybrat ta, v nichž je dosaženo optimální hodnoty účelové funkce.



Obrázek 5.1: Schéma algoritmu řešení úlohy.

6 Závěr

V disertační práci byla provedena analýza vybraných literárních zdrojů a s pomocí syntézy získaných poznatků byl vytvořen návrh řešení modelu po částech lineárního programování s nekonvexní účelovou funkcí. V této závěrečné kapitole budou shrnuty nejdůležitější body realizovaného výzkumu na uvedené téma a představeny výsledky zkoumání.

Literární přehled obecně shrnuje problematikou související s problémy optimalizace a modely po částech lineárního programování. V každé z kapitol se více či méně objevují důležité poznatky, které byly následně využity při vypracování návrhu řešení zvoleného problému. Především bylo využito poznatků z následujících oblastí:

- Hledání extrémů funkcí
- Lineární programování a simplexová metoda
- Vícekriteriální programování a vícekriteriální simplexová metoda
- Podmínky optimality řešení
- Konvexnost funkcí
- Po částech lineární programování

V druhé části práce byl řešen problém hledání optima u úlohy po částech lineárního programování s nekonvexní účelovou funkcí. K řešení problému bylo přistoupeno v návaznosti na práci Houšky a Brožové (2002) a Houšky (2003 a 2005), a to převedením po částech lineárního problému na model lineární. Bylo nutné vyřešit otázku nekonvexnosti dílčích účelových funkcí optimalizačního modelu. Neconvexní charakter účelových funkcí má za následek nejednoznačnost polohy optimálního řešení. Bylo nutné vyřešit, jakým způsobem procházet prostor přípustných řešení, aby bylo optimální řešení úlohy nalezeno v rozumném čase s využitím rozumných výpočetních prostředků.

Byla nalezena analogie mezi vícekriteriálním programováním a po částech lineárním programováním. Bylo dokázáno, že kombinace lineárních segmentů dílčích účelových funkcí lze chápat jako kritéria rychlosti postupu k dosažení optimálního řešení. Úloha byla převedena na vícekriteriální optimalizační problém a řešena vícekriteriálním simplexovým algoritmem. Bylo dokázáno, že optimální řešení po částech lineární úlohy je některé ze všech nedominovaných řešení vícekriteriální úlohy. Jelikož vícekriteriální

simplexový algoritmus prochází všechna nedominovaná řešení úlohy, potom je možné nalézt jedno nebo více optimálních řešení úlohy v konečném počtu kroků.

Jednodušší situace nastává v případě účelových funkcí s monotónním průběhem. Bylo dokázáno, že u těchto úloh lze dosáhnout optimálního řešení snadno. Je však potřeba prověřit, zdali neexistují alternativní optimální řešení úlohy. V případě nemonotónního průběhu účelových funkcí je situace komplikovaná, neboť algoritmus nesměruje k optimálnímu řešení přímo, a v řešení je možné se pohybovat i směrem „vzad“. Tento případ je na počet kroků algoritmu náročnější.

Uvedené dvě varianty byly podrobně ilustrovány na příkladech a jejich řešení bylo doplněno komentáři o zobecnitelnosti uvedeného postupu. Tyto dvě úlohy byly doplněny o speciální případ úlohy, jejíž množina přípustných řešení je symetrická a obsahuje degenerované báze. Zde byla diskutována úskalí této výpočetně nepříznivé úlohy.

V závěru je čtenáři představen způsob, jakým se lze lépe orientovat v prostoru řešení. Tento prostor je totiž v n dimenzích těžko představitelný, a výsledné hodnoty účelové funkce i obtížně identifikovatelné a interpretovatelné.

Využitelnost navrženého postupu pro řešení praktických problémů lze nalézt obecně u každé nelineární optimalizační úlohy. Každou nelineární funkci lze s pomocí různých metod aproximovat na funkci po částech lineární, a to s větší či menší přesností. V ekonomických aplikacích často vyjadřuje účelová funkce náklady nebo výnosy nějakého procesu, resp. trend jejich průběhu. V případě nákladů lze tuto křivku chápat jako nákladovou funkci např. výroby. Pokud bude výroba omezena nějakou sadou podmínek, potom je nanejvýš vhodné aplikovat v této situaci optimalizační model. Protože v praxi zpravidla lineární vztahy neplatí, lze očekávat, že i obecná nákladová funkce bude mít nelineární charakter. Stejným způsobem lze nahlížet i na funkce produkční. Aproximace nelineární funkce na po částech lineární může znamenat výpočetní úsporu u složitějších typů modelů.

Představený algoritmus není vhodný pro ruční řešení v případě rozsáhlejších úloh. Je však založen na iterativním algoritmu, jehož automatizovaná verze má ve světě počítačů mnoho podob. Navržený algoritmus je možné přenést do programové podoby. O tomto algoritmu je známo, že počet jeho iterací je konečný. Zde lze spatřovat výhodu oproti algoritmům řešícím složité nelineární problémy. Převedením na problém po částech lineární lze získat dostatečně dobré řešení v rozumném výpočetním čase.

Zdroje

- AVKIRAN, N. C. Investigating technical and scale efficiencies of Australian Universities through data envelopment analysis. *Socio-economic planning sciences*. 2001, roč. 35, s. 57-80.
- BAYINDIR, Z. P., BIRBIL, Ş. I a FRENK, J. B. G. A deterministic inventory/production model with general inventory cost rate function and piecewise linear concave production costs. *European journal of operational research*. 2007, roč. 179, s. 114-123.
- BAZARAA, M, SHERALI, H. D. a SHETTY, C. *Nonlinear programming: theory and algorithms*. 3rd ed. Hoboken: John Wiley, 2006, xv, 853 s. ISBN 04-714-8600-0.
- BERTSEKAS, D. P. *Nonlinear programming*. 2nd ed. Belmont: Athena Scientific, c1999, xiv, 786 s. ISBN 18-865-2900-0.
- CALE, W. G., Jr. Modeling grassland primary productivity using piecewise stationary, piecewise linear mathematics. *Ecological modelling*. 1979, roč. 7, č. 2., s. 107-123.
- COHON, J. L. *Multiobjective programming and planning*, New York: Academic press, 1978.
- COTTLE, R. W. a DANTZIG, G. B. Complementary pivot theory of mathematical programming. *Linear algebra and its applications*. 1968, s. 103-125.
- DANTZIG, G. B. *Programming in a linear structure*. Comptroller, USAF, Washington, D.C., 1948.
- DE BEST, J. J. T. H. a kol. Robust control of piecewise linear systems: A case study in sheet flow control. *Control engineering practice*. 2008, roč. 16, s. 991-1003.
- DE MOOR, B. *Mathematical concepts and techniques for modelling of static and dynamic systems*. 1988. Disertační práce. Katholieke Universiteit Leuven, Belgium.
- DEMPE, Stephan. *Foundations of bilevel programming*. New York: Springer. 2010, ISBN 978-144-1952-202.
- ELIMAM, A. A., AWNI, A, MOUSTAFA, S. a AL-AKHOND, S. Application program for the Sulaibiya solar thermal power plant: Energy flow and water allocation model. *Solar energy*. 1988, roč. 41, č. 2, s. 169-182.
- FORTNOW, L. The status of the P versus NP problem. *Commun. ACM*. 2009, roč. 52, č. 9, s. 78-86.
- GIANNAKIS, D, JAMASB, T. a POLLITT, M. Benchmarking and incentive regulation of quality of service: an application to the UK electricity distribution networks. *Energy policy*. 2005, roč. 33, s. 2256-2271.

-
- GÜZELIS, G a GÖKNAR, I. A canonical representation for piecewise affine maps and its application to circuit analysis. *IEEE Trans. Circuits Syst.* 1991, roč. 38, s. 1342-1354.
- HITCHCOCK, F. L. Distribution of a product from several sources to numerous localities. *Journal of Mathematical Physics.* 1941, roč. 20, s. 224-230.
- HLAVATÝ, R. Optimization in Stock Control Models with Markov Property. In: *Mathematical Methods in Economics 2010, part I*, 2010, s.232-236.
- HLAVATÝ, R. Interpretation of Dual Model for Piecewise Linear Programming Problem. In: *Proceedings of 30th International Conference Mathematical Methods in Economics 2012*, 2012, s.290-295.
- HLAVATÝ, R. On Alternative Remedy for Multicollinearity in Data Set. In: *Proceedings of 31st International Conference Mathematical Methods in Economics 2013*, 2013, s.255-260.
- HLAVATÝ, R. Saaty's Matrix Revisited: Securing the Consistency of Pairwise Comparisons. *Proceedings of 32nd International Conference Mathematical Methods in Economics 2013*, 2013, s.287-292.
- HLAVATÝ, R., DÖMEOVÁ, L. Students' progress throughout examination proces as a Markov chain. *International Education Studies*, 2014, roč.7, č.12, s.20-29.
- HOUŠKA, M., BROŽOVÁ, H. The method of cost evaluated distance variables for solving piecewise linear programming models. In: *Proceedings of the 20th International Conference MME, Ostrava*, 2002.
- HOUŠKA, M. Modified Simplex Algorithm for Solving Non-Convex PWLP Models. In *Proceedings of Matematical Methods in Economics*, PEF ČZU v Praze, 2003.
- HOUŠKA, M. *Nové přístupy k modelování objektů pomocí metod po částech lineárního programování*, 2005. Disertační práce. PEF ČZU v Praze.
- HUERTAS, J. L., RUEDA, A. a RODRIGUEZ-VAGUEZ, A. Multi-dimensional piecewise linear partitions: global canonical representation. *Proc. ISCAS*.1984. s.1106-1109.
- CHARNES, A., COOPER, WW. a FERGUSON, R.: Optimal estimation of executive compensation by linear programming, *Management Science*, 1955, roč.1, s.138-151.
- CHU, F-L. A piecewise linear approach to modeling and forecasting demand for Macau tourism. *Tourism management*. 2011, roč. 32, s. 1414-1420.
- CHUA, L. O. a KANG, S. M. Section-wise piecewise linear functions: Canonical representation, properties and applications. *Proc. IEEE*. 1977, roč. 65, s. 915-929.
- JUDD, K.L. *Numerical Methods in Economics*, The MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 1998.

-
- KAHLERT, C a CHUA, L. O. A generalized canonical piecewise linear representation. *IEEE Trans. Circuits Syst.* 1990, roč. 37, s. 373-382.
- KAHLERT, C a CHUA, L.O. The Complete canonical piecewise-linear representation-part I: The Geometry of the domain space. *IEEE Trans. Circuits Syst.* 1992, roč. 39, s. 222-236.
- KAMESHWARAN, S a NARAHARI, Y. Nonconvex piecewise linear knapsack problems. *European journal of operational research.* 2009, roč. 192, s. 56-68.
- KANG, S. M. a CHUA, L. O. A global representazion of multi-dimensional piecewise linear functions with linear partitions. *IEEE Trans. Circuits Syst.* 1978, roč. 25, s. 938-940.
- KANTOROVICH, L. V. Mathematical Methods in the Organization and Planning of Production. Originally published by Publication House of Leningrad State University (1939), translated in *Management Science* 6, 1958, s. 366-422.
- KARTERAKIS, S. M., KARATZAS, G. P., NIKOLOS, I. K. a PAPADOPOLOU, M. P. Application of linear programming and differential evolutionary optimization methodologies for the solution of coastal subsurface water management problems subject to environmental criteria. *Journal of Hydrology.* 2007, roč. 342, s. 270-282.
- KAŠPAR, J., MARUŠÁK, R. a HLA VATÝ, R. A Forest Planning Approach with Respect to the Creation of Overmature Reserved Areas in Managed Forests. *Forests*, 2015, roč.6, č.2, s.328-343.
- KOOPMANS, T. C. Optimum Utilization of the Transportation Systém. In: *Proceedings of the International Statistical Conference.* Washington, D.C., 1949.
- LAŠČIAK, A. a kol.: *Optimálne programovanie.* Alfa, Bratislava, 1983, ISBN 63-560-83.
- MIZUNO, H a ABE, M. Voice conversion algorithm based on piecewise linear conversion rules of formant frequency and spectrum tilt. *Speech communication.* 1995, roč. 16, s. 153-164.
- NIEMINEN, J. K. Linking food webs to ecosystem processes: Piecewise linear model of soil microcosms. *Ecological modelling.* 2008, roč. 217, s. 87-94.
- PERESSINI, A. L., SULLIVAN, F. E. a UHL, J. *The mathematics of nonlinear programming.* Corr. 2nd print. New York: Springer-Verlag, 1993, x, 273 p. ISBN 03-879-6614-5.
- RAMOS-REAL, F. J. a kol. The evolution and main determinants of productivity in Brazilian electricity distribution 1998–2005: An empirical analysis. *Energy economics.* 2009, roč. 31, s. 298-305.
- REKTORYS, K. *Přehled užití matematiky.* Třetí nezměněné vydání. Praha: SNTL, 1973.

-
- ROHN, J. *Problém lineární komplementarity a kvadratické programování: Stručný učební text* [online]. [cit. 2013-04-21]. 2002. Dostupné z:
<http://uivtx.cs.cas.cz/~rohn/publist/linkomp.pdf>
- RUBINOV, A. M. a YANG, X. *Lagrange-type functions in constrained non-convex optimization*. Boston: Kluwer Academic Publishers, c2003, xi, 286 p. ISBN 14-020-7627-4.
- RUSZCZYŃSKI, A. P. *Nonlinear optimization*. Princeton, N.J.: Princeton University Press, c2006, xii, 448 p. ISBN 06-911-1915-5.
- TUY, By Hoang. *Convex analysis and global optimization*. New York: Springer, 1998. ISBN 978-144-1947-833.
- VAN BOKHOVEN, W. M. G. a LEENAERTS, D. M. W.. *Piecewise linear modeling and analysis*. New York: Springer. 2010. ISBN 978-144-1950-468.
- VANDERBEI, R. J. *Linear programming: foundations and extensions*. 3rd ed. Boston: Springer, c2008, xix, 464 p. ISBN 978-038-7743-875.
- VIAGGI, D., BARTOLINI, F. a RAGGI, M. Combining linear programming and principal-agent models: An example from environmental regulation in agriculture. *Environmental modelling & software*. 2009, roč. 24, s. 703 - 710.
- WEISSTEIN, E. W. Sign. *Mathworld: Wolfram web resource* [online]. [cit. 2013-04-28].
- XIE, H a kol. An analytical solution to contaminant diffusion in semi-infinite clayey soils with piecewise linear adsorption. *Chemosphere*. 2011, roč. 85, 1248-1255.
- ZELENÝ, M. *Linear multiobjective programming*. Springer-Verlag, Berlin and New York, 1974.
- ZELENÝ, M. *Multiple criteria decision making*. Springer-Verla, Berlin and New York, 1976.
- ZHANG, Y. M., HUANG, G. H. a HE, L. An inexact reverse logistics model for municipal solid waste management systems. *Journal of environmental management*. 2011, roč. 92, s. 522-530.